

Diplomarbeit

**Das CAPM
im zeitkontinuierlichen Fall**

Betreuer: Prof. Dr. T. Hartmann-Wendels

Betreuungsassistent: Dipl.-Kfm. C. Viewers

Vorgelegt an der
Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
Lehrstuhl für Betriebswirtschaft, insbes. betriebliche Finanzwirtschaft

von: Dipl.-Ing. Michael Hanrath
Kaiser-Friedrich-Allee 23
52074 Aachen
170180

Abgabetermin: 07.09.1995

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis	v
Abbildungsverzeichnis	vi
Symbole/Abkürzungen	vii
1 Übersicht	1
1.1 Zielsetzung und Modellstruktur	1
1.2 Inhalt und Aufbau	1
2 Kontinuierliche Anlage und Konsum unter Unsicherheit bei verschiedenen Zeithorizonten	4
2.1 Die Budget-Gleichung	4
2.2 Das zwei-Anlagen Modell	6
2.2.1 Optimalitätsbedingung und ihre Motivation	6
2.2.2 Umformung der Optimalitätsbedingung für die dynamische Programmierung	7
2.2.3 Bestimmung der Extremalbedingungen	9
2.3 Konstante relative Risikoaversion	10
2.3.1 Zur Bedeutung von ϵ und ν	12
2.3.2 Diskussion der Lösung	13
2.4 Behandlung von Spezialfällen	14
2.4.1 Dynamisches Verhalten ohne Bewertung des Nachlasses	14
2.4.2 Betrachtung auf unbegrenzte Zeit	15
2.5 Ökonomische Interpretation der optimalen Entscheidungsregeln	16
2.5.1 Unabhängigkeit von Portefeuillewahl und Konsumententscheidung	16
2.5.2 Erwartungswert und Varianz des Gesamtportefeuilles	16
2.5.3 Das Phelps-Ramsey Problem	16
2.6 Verallgemeinerung auf mehrere Anlagen	20
3 Konsumallokation und Portefeuille-Zusammenstellung unter verallgemeinerten Bedingungen	22
3.1 Ableitung grundlegender Gleichungen	22
3.1.1 Anlagepreisentwicklung	22
3.1.2 Schrittweise Entwicklung der Budgetgleichung	23
3.2 Ableitung der optimalen Anlage und Konsumallokation	25
3.2.1 Aufbau der Lagrange-Funktion	25

3.2.2	Bestimmung der Lösung	27
3.2.3	Vereinfachung durch Existenz der risikolosen Anlage	28
3.3	Logarithmische Normalverteilung der Preise	28
3.3.1	Bemerkungen zur Annahme der logarithmischen Normalverteilung und der geometrischen Brown'schen Bewegung	29
3.3.2	Das Separationstheorem	31
3.3.3	Berücksichtigung der sicheren Anlage	34
3.3.4	Analogie zur Erwartungswert-Varianz-Analyse von Tobin-Markowitz	35
3.4	Geschlossene Lösungen für eine spezielle Klasse von Nutzenfunktionen	37
3.4.1	Zeitlicher Verlauf der Konsum- und Portefeuilleallokation	40
3.4.2	Berücksichtigung von Einkommen aus Anstellungsverhältnissen	44
3.5	Diskontinuierliche Zustandsänderungen — Poisson-Prozesse	44
3.5.1	Anwendung auf die Preisbildung	45
3.5.2	Stochastische Einkommenserhöhungen	46
4	Das intertemporale zeitkontinuierliche CAPM auf Basis des Kapital- marktgleichgewichts	48
4.1	Grundsätzliches zu den Eigenschaften einer Anlage	48
4.2	Modellannahmen und Abbildung der Realität	49
4.2.1	Vollkommenheit des Marktes	49
4.2.2	Zeitkontinuierlicher Handel und Stochastische Prozesse	50
4.2.3	Modellierung des die Preise generierenden Prozesses	50
4.2.4	Modellierung der Kapitalmarktzustandsvariablen	53
4.2.5	Beziehungen der Prozesse untereinander	54
4.3	Formulierung der Präferenzstruktur und der Budget-Gleichung für mehrere Anleger	54
4.4	Die Anlagenachfragefunktion	55
4.5	Betrachtung bei konstanten Kapitalmarktparametern	57
4.6	Der Zinssatz als einzige Zustandsvariable	58
4.6.1	Verallgemeinerte Separation — Ein drei-Fond Theorem	59
4.6.2	Das Anlageertragsgleichgewicht	61
4.6.3	Konstellationen die zur klassischen Wertpapiermarktlinie führen	64
4.6.4	Übereinstimmung mit empirischen Ergebnissen	65
4.7	Betrachtung des allgemeinen Modells	66
4.7.1	Zusammstellung von Fonds zur Absicherung gegen Änderungen der Kapitalmarktparameter	66
4.7.2	Bewertung der Fonds	69

4.7.3	Das $(m + 2)$ -Fond Theorem	71
4.7.4	Auswertung der Gleichgewichtsbeziehungen	73
4.7.5	Die Wertpapiermarkt-Hyperebene	75
4.8	Das auf der Konsumallokation basierende CAPM	78
4.8.1	Betrachtung der marginalen Nutzenfunktion bezüglich des Wohlstands	78
4.8.2	Gleichsetzung der marginalen Nutzenfunktionen	79
4.8.3	Zustandsunabhängigkeit der Nutzenfunktion	80
4.9	Abschließende Betrachtung	82
5	Numerische Simulation	85
5.1	Generierung modellkonformer Anlagepreise	85
5.2	Bestimmung der erwarteten Renditen aus den Observablen	88
5.2.1	Maximum-Likelihood Estimation	88
5.2.2	Ausnutzung der Unterraumeigenschaft von $\{\vec{\alpha}\}$	89
5.2.3	Lösung der Schätzergleichung	89
5.2.4	Geometrische Interpretation	91
5.3	Simulationsergebnisse	92
A	Mathematische Grundlagen	96
A.1	Die Konvergenzsymbole $o(\cdot)$ und $O(\cdot)$	96
A.2	Charakteristika von stochastischen Prozessen	96
A.2.1	Verteilungsdichten	96
A.2.2	Mehrdimensionale Verteilungsdichten	97
A.2.3	Autokorrelation / Gedächtnislosigkeit	98
A.2.4	Stationarität	99
A.2.5	Wiener-Prozeß	99
A.3	Itô-Prozesse / Itô's Lemma	99
A.3.1	Motivation des Formalismus für stochastische Differentialgleichungen	99
A.3.2	Itô-Prozesse	101
A.3.3	Itô's Lemma	101
A.4	Lineare Algebra	102
A.4.1	Eigenwerte / Eigenvektoren	102
A.4.2	Hauptachsentransformation quadratischer Formen	102
A.4.3	Gradient einer quadratischen Form	103
A.4.4	Cholesky-Zerlegung	103
A.4.5	Wichtige Rechenregeln für und Eigenschaften von Matrizen	103
A.5	Vektoranalysis	104

B Erstellte Software	105
B.1 Entwicklung der optimalen Konsum- und Investitionsentscheidungen über die Zeit	105
B.2 Kurssimulation gemäß den Annahmen des zeitkontinuierlichen CAPM . . .	107
Literatur	111
Versicherung	112

Tabellenverzeichnis

3.1	Gesamtkonsum bei verschiedenen Nutzenfunktionen und Gegenwartspräferenzen	42
4.1	Gegenüberstellung der betrachteten Modelle	84
5.1	Standardabweichungen der Schätzer unter verschiedenen Bedingungen . . .	93
A.1	Eigenschaften der Normalverteilung und der logarithmischen Normalverteilung	97

Abbildungsverzeichnis

2.1	Verhältnis des Konsums zum Gesamtvermögen über die Zeit	13
2.2	Konsumelastizität in Abhängigkeit von der Risikoscheu	19
3.1	Normalverteilung und logarithmische Normalverteilung	29
3.2	Beispielhafte Kursentwicklung in Form einer geometrischen Brown'schen Bewegung	31
3.3	Veranschaulichung des Separationstheorems	33
3.4	Bestimmung des optimalen Portefeuilles	36
3.5	Verhalten des Terms $C_0^* \cdot C_I^*$ in C^* über der Zeit für verschiedene $(\rho - \gamma\nu)/\delta$	39
3.6	Beispielhafte Kursverläufe über einen Zeitraum von 50 Jahren	41
3.7	Betrachtete Nutzenfunktionen	42
3.8	Gesamtvermögen, Konsum und Portefeuillewahl über die Zeit	43
5.1	Schematischer Aufbau der Simulation	85
5.2	Grafische Interpretation der Maximum-Likelihood Estimation	91
5.3	Simulierte Schätzungen bei unterschiedlichen Kostellationen	94

Symbole/Abkürzungen

Symbol	Bedeutung
A	absolute Risikoaversion
B	$n \times (m + 1)$ -Matrix, bildet (Marktportefeuille-)Fonds auf Anlagen ab
$B(W, t)$	Nachlaßbewertungsfunktion
B^k	Nachlaßbewertungsfunktion des k -ten Investors
$C(t)$	geplanter Konsum zur Zeit t
C^*	optimaler Konsum
D_i^*	Gesamtnachfrage nach dem i -ten Fond
D_i	Gesamtnachfrage nach der i -ten Anlage
G	3. Kapitel: Umkehrfunktion von U_C bezüglich C
G	4. Kapitel: Diagonalmatrix angewandt auf den mehrdimensionalen Wiener-Prozeß
$G(W, \vec{S}, t)$	marginale Nutzenfunktion bezüglich des Wohlstands
H	Hessematrix (2.+3. Kapitel)
$I(W, t)$	Wohlstands-Nutzenfunktion zur Zeit t
$J(W, \vec{P}, t)$	Wohlstands-Nutzenfunktion bei Preisniveau $\vec{P}$ zur Zeit t
K	Kapital, gemessen in physikalischen Einheiten (z. B. Maschinen)
L	Lagrange-Funktion
M	Gleichgewichtsgesamtwert aller Anlagen am Kapitalmarkt
N	Anzahl ausgegebener Unternehmensanteile
N_i	Anteile an der i -ten Anlage
P_K	Preis pro Einheit Kapital, gemessen in Konsumeinheiten
$P_i(t)$	Preis des i -ten Wertpapiers zur Zeit t (3.+4. Kapitel)
R	relative Risikoaversion
T	Endzeitpunkt
T^k	Zeithorizont des k -ten Investors
$U(C, t)$	Konsum-Nutzenfunktion zur Zeit t
U^k	Nutzenfunktion des k -ten Investors
$V(C)$	3. Kapitel: Konsum-Nutzenfunktion (nicht zeitabhängig)
$V_i(t)$	4. Kapitel: Preis des i -ten Anlagefonds
$W(t)$	Gesamtvermögen zur Zeit t
W^k	Vermögen des k -ten Investors
X	Cash Flow (4. Kapitel)
$X_i(t)$	Preis des i -ten Wertpapiers zur Zeit t (2. Kapitel)

Symbol	Bedeutung
$E\{x\}$	Erwartungswert
$E_t\{x\}$	Erwartungswert bedingt auf Zeitpunkt t
1	Einheitsmatrix
$P(\cdot)$	Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von $(\cdot)$
Σ	Kovarianzmatrix der Anlagenpreisstreuoprozesse
Σ'	Kovarianzmatrix der (Marktportefeuille-)Fond-Preisstreuoprozesse
Σ^*	Kovarianzmatrix der Fond-Preisstreuoprozesse
$\overset{\circ}{W}$	mittlere erwartete Wohlstandsänderungsrate
α	erwartete Rendite pro Zeiteinheit
α'_i	erwartete Rendite des i -ten-(Marktportefeuille-)Fonds pro Zeiteinheit
α_i^*	erwartete Rendite des i -ten Fonds pro Zeiteinheit
$\bar{B}$	$(m+1) \times (m+1)$ -Matrix, bildet ausgewählte Anlagen auf (Marktportefeuille-)Fonds ab
$d\vec{q}$	Rauschen des Zustandsvektors der Kapitalmarktparameter
$d\vec{x}$	Rauschen der Standardabweichung der Anlagenpreise
$d\vec{z}$	Rauschen der Anlagenpreise
$d\vec{q}$	Rauschen erwarteten Renditen
dz	Wiener-Prozeß
dz'_i	Rauschprozeß des i -ten (Marktportefeuille-)Fonds
dz_i^*	Rauschprozeß des i -ten Fonds
δ	relative Risikoaversion
η_{ij}	Korrelationskoeffizient zwischen den Prozessen dq_i und dz_i
μ	4. Kapitel: erwartete Wachstumsrate von G
ν'_{ij}	Inverse Kovarianzmatrix $\nu_{ij} = ((\Sigma')^{-1})_{ij}$
ν^*_{ij}	Inverse Kovarianzmatrix $\nu_{ij} = ((\Sigma^*)^{-1})_{ij}$
ν_{ij}	Inverse Kovarianzmatrix $\nu_{ij} = (\Sigma^{-1})_{ij}$
$\phi(w, C; W, t)$	Bellman-Funktion
ρ	Korrelationskoeffizient zwischen i -tem und j -tem Prozeß
ρ	Zeitpräferenz
σ'_i	Streuung des i -ten (Marktportefeuille-)Fonds
σ'_{ij}	Kovarianz des i -ten (Marktportefeuille-)Fonds mit dem j -ten
σ^2	Standardabweichung
σ_i^*	Streuung des i -ten Fonds

Symbol Bedeutung

σ_{ij}^*	Kovarianz des i -ten Fonds mit dem j -ten
σ_M^2	Varianz des Marktportefeuilles
σ_{Qij}	Kovarianz zwischen q_i und q_j
σ_{iM}	Kovarianz des Marktportefeuilles mit der i -ten Anlage
σ_{ij}	Kovarianz zwischen i -tem und j -tem Prozeß
$\vec{1}$	$(1, \dots, 1)^T$
$\vec{S}$	Zustandsvektor der Kapitalmarktparameter
$\vec{w}$	Anlagenanteilsvektor ($(\vec{w})_i = w_i$)
$\vec{x}$	Gesamtzustandsvektor
ξ_P	Zustandsvektor bestehend aus $\vec{P}$, $\vec{\alpha}$ und $\vec{\sigma}$
a_i	Wachstumsrate von α_i
b_i	Streuung der α_i
c	Konsum pro Zeiteinheit
c^k	Konsum pro Zeiteinheit des k -ten Investors
d_i^k	Nachfrage des k -ten Investors nach der i -ten Anlage
h	Handelszeitintervall
r	Zinssatz für sichere Anlagen
t	Zeit
u_i	Wachstumsrate von σ_i
v_i	Streuung der σ_i
w^*	optimales Portefeuille
$w_i(t)$	Anteil am Wertpapier i zur Zeit t
y	Einkommen pro Zeiteinheit
$\mathcal{L}$	Dynkin-Operator

Abkürzung Bedeutung

bzw.	beziehungsweise
Nr.	Nummer
o.B.d.A.	ohne Beschränkung der Allgemeinheit
s.	siehe
z.B.	zum Beispiel

1 Übersicht

1.1 Zielsetzung und Modellstruktur

Ziel dieser Arbeit ist es, das Capital Asset Pricing Model (CAPM) in seiner zeitkontinuierlichen Variante vorzustellen und abzuleiten. Die Bezeichnung „zeitkontinuierlich“ impliziert zwei Sachverhalte: 1. die Betrachtung erfolgt mehrperiodig und 2. das Handelszeitintervall geht im Grenzfall gegen Null. Dadurch wird dem Sachverhalt Rechnung getragen, daß die Investoren ihr Portefeuille in der Realität nicht nur für eine Periode planen. Die mehrperiodige Betrachtung bedingt die Einführung eines Zeithorizontes und eine Bewertung des Vermögens gegen Ende dieses Zeithorizontes. Die Modellierung basiert auf der Nutzenmaximierung jedes einzelnen Investors. Die Nutzenfunktionen sind so gewählt, daß sie den Konsum und das erreichte Endvermögen der Investoren bewerten. Das zeitkontinuierliche CAPM bemüht sich daher um eine im Vergleich zu anderen einfacheren Modellen präzisere Abbildung der Realität in ein mathematisches Modell. Ziel dieser besseren Abbildung ist es, die erwarteten Renditen genauer bestimmen zu können.

1.2 Inhalt und Aufbau

Die Arbeit gliedert sich neben diesem in weitere vier Kapitel und zwei Anhänge.

Das zweite Kapitel¹ beschäftigt sich mit der mathematischen Modellierung des CAPM, wenn Investition und Konsum zeitkontinuierlich erfolgen. Wie beim klassischen statischen CAPM erfolgt die Betrachtung unter Einbeziehung von Unsicherheit. Zentrale Bestandteile der Behandlung bilden die Budget-Gleichung und die Aufstellung Optimalitätsgleichung. Die Lösung der Optimalitätsgleichung findet für verschiedene Zeithorizonte statt. Die Diskussion erfolgt größtenteils für eine risikobehaftete und eine sichere Anlage. Gegen Ende des Kapitels wird eine Anleitung zur Verallgemeinerung auf mehrere Anlagen gegeben.

Das dritte Kapitel² entwickelt die Ergebnisse des zweiten Kapitels weiter, in dem es das Modell unter verallgemeinerten Prämissen ableitet. Die Annahme der logarithmischen Normalverteilung der Preise wird intensiv behandelt. Die Motivation dieser Prämisse wird im Zusammenhang mit der Annahme der Normalverteilung des klassischen CAPM diskutiert. Auf Basis der logarithmischen Normalverteilung wird das Separationstheorem abgeleitet. Unter Berücksichtigung der sicheren Anlage werden Analogien zum klassischen CAPM behandelt. Nach der Vorstellung von geschlossen lösbaren Konstellationen schließt sich eine Untersuchung von diskontinuierlichen Zustandsänderungen an.

¹Dieses Kapitel ist größtenteils an Merton, R. C.: „Continuous-Time Finance“, Kapitel 4 angelehnt.

²Dieses Kapitel basiert auf Merton, R. C.: „Continuous-Time Finance“, Kapitel 5.

Im vierten Kapitel³ wird das intertemporale zeitkontinuierliche CAPM auf der Basis des Kapitalmarktgleichgewichtes abgeleitet. Bei der Ableitung wird besonderen Wert auf die Modellierung der Realität durch die stochastischen Prozesse gelegt⁴, da sie die Grundlage für das Verständnis der weiteren Rechnung bildet. Nachfolgend wird das Modell in drei verschiedenen Komplexitätsstufen vorgestellt: 1. bei konstanten Kapitalmarktparametern, 2. dem Zinssatz als einziger Zustandsvariablen, und 3. dem allgemeinen Modell, das mehrere Zustandsvariablen berücksichtigt. Auf der Basis des allgemeinen Modells wird das zentrale Ergebnis des mehrstufigen zeitkontinuierlichen CAPM in Form der Wertpapiermarkt-Hyperebene abgeleitet, die das Analogon zur Wertpapiermarkt-Linie des klassischen CAPM darstellt. Der praktische Nutzen der Wertpapiermarkt-Hyperebene wird anschließend hinterfragt, da eine direkte Bestimmung der erwarteten Renditen nicht möglich ist. Das in den folgenden Abschnitten behandelte Konsum-basierte CAPM (CCAPM) weist gewisse Nachteile der Wertpapiermarkt-Hyperebene nicht mehr auf. Es erfordert jedoch stärkere Annahmen, die in der Praxis als unrealistisch zu bezeichnen sind. Das Kapitel endet mit einer abschließenden Diskussion und tabellarischen Gegenüberstellung des klassischen CAPM, des zustandsorientierten zeitkontinuierlichen CAPM und des CCAPM.

Das fünfte Kapitel liefert einen Eindruck von der Performance der verschiedenen Modelle. Das Vorgehen ist dabei wie folgt: Durch numerische Simulation auf dem Rechner werden Musterprozesse für die Entwicklung eines Preisgefüges, das sich entsprechend den Modellannahmen verhält, generiert. Diese künstlich entsprechend den Modellannahmen erzeugten und gestörten Preise werden anschließend dem zu untersuchenden Modell zur Schätzung zugeführt. Es handelt sich daher um ein aus drei Funktionsblöcken bestehendes System. Der erste simuliert den Kapitalmarkt mit sämtlichen Parametern und stellt die in der Realität beobachtbaren Parameter dem zweiten zur Verfügung. Dieser berechnet daraus die nicht observablen Parameter. Der dritte vergleicht die berechneten Parameter des zweiten Blocks mit den simulierten „richtigen“ des ersten Blocks und bestimmt auf diese Weise die Performance der Schätzung. Natürlich hat diese Art der Ermittlung der Performance einen realitätsfernen sterilen Charakter, da die Kurse sich genau den Modellannahmen entsprechend verhalten. Die Simulation sagt daher nichts über die tatsächliche Güte der Modellierung der Realität aus. Um eine solche Beurteilung zu ermöglichen, sind tatsächliche Kurse von der Börse erforderlich. Der Sinn der Simulation liegt vielmehr darin, die theoretische Performance der Modelle zu untersuchen und die Vorgehensweise bei ihrer

³Es basiert auf Merton, R. C.: „Continuous-Time Finance“, Kapitel 15.

⁴Bei Merton selbst gibt es in Merton, R. C.: „Continuous-Time Finance“ auf den Seiten 483–486 einige Unklarheiten, die zum Teil aus der Benutzung der gleichen Variablennamen für unterschiedliche Größen resultieren.

Anwendung zu verdeutlichen.

Anhang A stellt die wichtigsten mathematischen Hilfsmittel kurz dar und Anhang B listet und dokumentiert die im Rahmen dieser Arbeit erstellte Software. Letzteres ist insbesondere dann von Bedeutung, wenn die Simulation der Preisgefüge durch tatsächliche Börsenkurse ersetzt werden soll⁵.

⁵Dies konnte im Rahmen dieser Arbeit leider nicht geschehen, da der die Daten verwaltende Assistent am Lehrstuhl seinen Wohnsitz verlegt hat, und die neue Adresse nicht in Erfahrung gebracht werden konnte. Ein Kauf der Kurse von kommerziellen Anbietern (z. B. Deutsche Bank, DTB) schied aufgrund der auftretenden hohen Kosten (über 3000 DM) aus.

2 Kontinuierliche Anlage und Konsum unter Unsicherheit bei verschiedenen Zeithorizonten

Dieses Kapitel befaßt sich mit der Ableitung von optimalen Entscheidungsregeln bezüglich der Portefeuille-Zusammenstellung und der Konsumallokation unter Unsicherheit. Diese Entscheidungsregeln beziehen sich nicht nur auf ein Handelsintervall, wie es vom klassischen CAPM bekannt ist, sondern betrachten mehrere Intervalle, deren Länge im Grenzübergang zu Null wird. Gleichzeitig wird der betrachtete Zeitraum beispielsweise auf mehrere Jahre oder Jahrzehnte ausgedehnt. Das Entscheidungsproblem kann daher als eine Art „Lebensaufgabe“ gesehen werden, die auch einen eventuell vorhandenen Nachlaß eine Bewertung erfahren läßt. Dieses Kapitel beschränkt sich in weiten Teilen auf die Behandlung von nur einer risikobehafteten und einer sicheren Anlage.

Die Analyse erfolgt auf Basis der Budget-Gleichung und der Aufstellung der Zielfunktion nebst Nutzenfunktion. Die Budget-Gleichung stellt eine Art intertemporäre Bilanzgleichung dar, die das Gleichgewicht zwischen den Erträgen aus den Investitionen einerseits und den Aufwendungen für Konsum und Neuanlage andererseits beschreibt. Anschließend erfolgt die Aufstellung und Motivation der Zielfunktion. Aus der Zielfunktion werden mittels Bellman-Prinzip und Lagrange'scher Optimierung Lösungen für die Entscheidungsvariablen gewonnen. Nach der Behandlung von Spezialfällen wird der ökonomischen Interpretation der Ergebnisse Platz eingeräumt. Das Kapitel endet mit der Anleitung zur Verallgemeinerung auf mehrere Anlagen.

2.1 Die Budget-Gleichung

Zur Ableitung und Formulierung der Budget-Gleichung werden zunächst einige Variablenvereinbarungen vorgenommen. Es sei $W(t)$ das Gesamtvermögen zum Zeitpunkt t , $X_i(t)$ der Preis der i -ten Anlage zum Zeitpunkt t , $C(t)$ der Konsum pro Zeiteinheit zum Zeitpunkt t und $w_i(t)$ das anteilig vom Gesamtvermögen in die i -te Anlage zum Zeitpunkt t investierte Vermögen. Damit gilt:

$$\sum_{i=1}^m w_i(t) := 1. \quad (2.1)$$

Für eine Handelsperiode der Länge h ergibt sich die Budget-Gleichung zu:

$$W(t) = (W(t_0) - C(t_0)h) \cdot \sum_{i=1}^m w_i(t_0) \frac{X_i(t)}{X_i(t_0)} \quad (2.2)$$

(2.2) beschreibt die Größe des Gesamtvermögens zum Zeitpunkt $t = t_0 + h$.

Durch Subtraktion von $W(t_0)$ von (2.2) ergibt sich unter Beachtung von (2.1)

$$\begin{aligned} W(t) - W(t_0) &= (W(t_0) - C(t_0)h) \cdot \left(\sum_{i=1}^m w_i(t_0) \frac{X_i(t) - X_i(t_0)}{X_i(t_0)} \right) - C(t_0)h \\ &= (W(t_0) - C(t_0)h) \cdot \left(\sum_{i=1}^m w_i(t_0) (e^{hg_i(t)} - 1) \right) - C(t_0)h \end{aligned} \quad (2.3)$$

mit

$$hg_i(t) := \ln \frac{X_i(t)}{X_i(t_0)}. \quad (2.4)$$

$g_i(t)$ werde im zeitdiskreten Fall durch einen stochastischen Prozeß wie folgt generiert:

$$hg_i(t) = \left(\alpha_i - \frac{\sigma^2}{2} \right) h + \Delta Y_i \quad (2.5)$$

Darin sei α_i die erwartete Rendite und $Y_i(t)$ werde durch einen Gaußschen-Irrfahrt-Prozeß erzeugt. Die zugehörige stochastische Differenzengleichung laute:

$$Y_i(t) - Y_i(t_0) =: \Delta Y_i = \sigma_i Z_i(t) h^{1/2}. \quad (2.6)$$

Dabei gelte:

- die $Z_i(t)$ seien paarweise unabhängig und normalverteilt $\forall t$
- σ_i^2 sei die Varianz des Prozesses Y_i pro Zeiteinheit h
- $E\{\Delta Y_i\} = 0$.

Durch Einsetzen von (2.5) in (2.3) ergibt sich:

$$W(t) - W(t_0) = (W(t_0) - C(t_0)h) \cdot \left[\sum_{i=1}^m w_i(t_0) \left(\exp \left[\left(\alpha_i - \frac{\sigma^2}{2} \right) h + \Delta Y_i \right] - 1 \right) \right] - C(t_0)h \quad (2.7)$$

Die Bestimmung des Erwartungswertes und der Varianz von (2.7) liefert die folgenden Ausdrücke¹:

$$E_{t_0}\{W(t) - W(t_0)\} = \left[\sum_{i=1}^m w_i(t_0) \alpha_i W(t_0) - C(t_0) \right] h + o(h) \quad (2.8)$$

und

$$E_{t_0}\{[W(t) - W(t_0)]^2\} = \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m w_i(t_0) w_j(t_0) E_{t_0}\{\Delta Y_i \Delta Y_j\} W^2(t_0) \right] h + o(h). \quad (2.9)$$

¹zur Bedeutung der Konvergenzsymbole s. Anhang A.1

E_{t_0} ist der auf die zum Zeitpunkt t_0 vorliegende Information bedingte Erwartungswert. Dies bedeutet, daß der Erwartungswertoperator bezüglich von Argumenten, deren Wert von Zeiten $t \leq t_0$ abhängt, die Identität darstellt.

Im Grenzwert des Gaußschen-Irrfahrt-Prozesses für $h \rightarrow 0$ ergibt sich aus (2.6) durch Anwendung des Formalismus für stochastische Differentialgleichungen²:

$$dY_i(t) = \sigma_i Z_i(t)(dt)^{1/2}. \quad (2.10)$$

Es sei noch eine Größe $\overset{\circ}{W}$ definiert, die die mittlere erwartete Wohlstandsänderungsrate beschreibt:

$$\overset{\circ}{W}(t_0) := \lim_{h \rightarrow 0} E_{t_0} \left\{ \frac{W(t) - W(t_0)}{h} \right\} = \sum_{i_1}^m w_i(t_0) \alpha_i W(t_0) - C(t_0). \quad (2.11)$$

2.2 Das zwei-Anlagen Modell

Um die folgenden Ausführungen zu vereinfachen, erfolgt die weitere Behandlung für den Fall, daß nur zwei Anlagen existieren: 1. die sichere Anlage und 2. eine nicht sichere Anlage. Im Abschnitt 2.6 wird diese Betrachtung auf mehrere Anlagen verallgemeinert. Wegen $w_1 + w_2 = 1$ folgt sofort $w_2 = 1 - w_1$, so daß es ausreicht w_1 oder einfach w zu betrachten.

Die zuvor bestimmten Ausdrücke für den Erwartungswert und die Varianz (2.8) und (2.9) von (2.7) stellen sich in diesem Fall wie folgt dar:

$$E_{t_0} \{W(t) - W(t_0)\} = \left([w(t_0)(\alpha - r) + r] W(t_0) - C(t_0) \right) h + o(h) \quad (2.12)$$

$$E_{t_0} \{[W(t) - W(t_0)]^2\} = w^2(t_0) W^2(t_0) \sigma^2 h + o(h) \quad (2.13)$$

Und (2.11) wird zu

$$\overset{\circ}{W}(t) = [w(t)(\alpha - r) + r] W(t) - C(t). \quad (2.14)$$

2.2.1 Optimalitätsbedingung und ihre Motivation

Das Problem der optimalen Portefeuille-Zusammensetzung lasse sich durch folgendes Optimierungsproblem beschreiben:

$$\max_{C(t), w(t)} E_{t=0} \left\{ \int_0^T e^{-\rho t} U(C(t)) dt + B(W(T), T) \right\}. \quad (2.15)$$

²s. auch Anhang A.3

Darin bedeuten $U(\cdot)$ die Nutzenfunktion des Anlegers, $B(\cdot, \cdot)$ die Nachlaßbewertungsfunktion, T den Zeithorizont und ρ die zeitliche Nutzenpräferenz. (2.15) beschreibt das Entscheidungsproblem in allgemeiner Form und soll im folgenden näher motiviert werden: Die Entscheidungsvariablen bei diesem Problem sind $C(t)$, die geplante Konsumallokation und $w(t)$, das zu jedem Zeitpunkt geplante Anlageportefeuille. Die Maximumsbildung erfolgt daher über diese Variablen.

Der Erwartungswert ist bedingt auf den Startzeitpunkt $t = 0$, da nur mit den Informationen dieses Zeitpunktes die Optimierung vorgenommen werden kann.

Wird zunächst das Integral, die Gewichtung mit $e^{-\rho t}$ und $B(\cdot, \cdot)$ in (2.15) vernachlässigt, so ergibt sich ein dem Bernoulli-Nutzen entsprechender Ausdruck. Die Wichtung mit $e^{-\rho t}$ bewertet zu einem früheren Zeitpunkt erlangten Konsum höher. Ist ρ groß, so besitzt der Anleger eine starke Gegenwartspräferenz und umgekehrt. Im Grenzfall $\rho = 0$ bedeutet dem Anleger der Konsum zu jedem Zeitpunkt innerhalb seines Zeithorizonts gleichviel.

Die Nachlaßbewertungsfunktion $B(W, t)$ gibt an, wie das Gesamtvermögen W im Zeitpunkt t zu bewerten ist. Wird $t = T = \text{Lebenszeit}$ gesetzt, so läßt sich der Name „Nachlaßbewertungsfunktion“ verstehen. (2.15) beschreibt in diesem Fall das Problem jedes Wirtschaftssubjektes, seinen Konsum auf seine Lebenszeit zu verteilen und nach Möglichkeit zu maximieren.

Es gelten darüber hinaus folgende Annahmen:

- $C(t) \geq 0$: Der Konsum kann zu keinem Zeitpunkt negativ werden.
- $W(t) > 0$: Das Gesamtvermögen ist zu jedem Zeitpunkt positiv.
- $W(0) = W_0 > 0$: Das Startvermögen ist positiv.
- $\frac{d}{dx}U(x) > 0$, $\frac{d^2}{dx^2}U(x) < 0$: Die Nutzenfunktion ist konkav.

2.2.2 Umformung der Optimalitätsbedingung für die dynamische Programmierung

Das Bellmansche Optimalitätsprinzip der dynamischen Programmierung zerlegt ein Entscheidungsproblem mit n Entscheidungsvariablen in ein Problem der sukzessiven Optimierung von n Problemen mit jeweils nur einer Entscheidungsvariablen. Dies bedeutet anschaulich gesprochen, daß das Problem von „hinten“ gelöst wird. Für die Anwendbarkeit des Bellmanschen Optimalitätsprinzips müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1. Das Problem muß in Stufen zerlegbar sein. Auf jeder Stufe ist eine Entscheidung zu treffen (hier: Konsum $C(t)$ und Portefeuillezusammensetzung $w(t)$).

2. Die Situation vor und nach der Entscheidung $(C(t), w(t))$ kann durch Zustände $W(t), W(t + dt)$ beschrieben werden.
3. Jeder Stufe kann ein Beitrag zur Zielfunktion zugeordnet werden.
4. Es existiert eine rekursive Beziehung zur Bestimmung des Gesamtzielfunktionswertes. Dieser Gesamtzielfunktionswert bestimmt sich hier durch einfache Summation bzw. Integration über die Teilbeiträge zur Zielfunktion.

Es sind damit alle Bedingungen erfüllt. Es folgt die Transformation in eine für das Bellman-Prinzip zuträgliche Form. Zunächst sei:

$$I(W(t), t) := \max_{C(s), w(s)} E_t \left\{ \int_t^T e^{-\rho s} U(C(s)) ds + B(W(T), T) \right\} \quad (2.16)$$

mit den gleichen oben genannten Annahmen. Damit gilt

$$I(W(T), T) = B(W(T), T). \quad (2.17)$$

Durch Substitution $t \rightarrow T$ und Einsetzen von (2.17) in (2.16) erhält man:

$$I(W(t_0), t_0) := \max_{C(s), w(s)} E_{t_0} \left\{ \int_{t_0}^t e^{-\rho s} U(C(s)) ds + I(W(t), t) \right\}. \quad (2.18)$$

Speziell gilt auch:

$$I(W_0, 0) := \max_{C(s), w(s)} E_{t_0} \left\{ \int_0^t e^{-\rho s} U(C(s)) ds + I(W(t), t) \right\}. \quad (2.19)$$

Nun wird ein Zeitschritt h betrachtet. Es gilt daher $t = t_0 + h$. Das Integral aus (2.18) läßt sich mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung wie folgt schreiben:

$$\int_{t_0}^{t_0+h} e^{-\rho s} U(C(s)) ds = e^{-\rho \tilde{t}} U(C(\tilde{t})) \cdot h \quad \text{mit } \tilde{t} \in [t_0, t_0 + h] \quad (2.20)$$

Der Ausdruck $I(W(t), t)$ in (2.18) wird in eine Taylorreihe 2. Ordnung nach t entwickelt, so daß sich unter Berücksichtigung der Kettenregel bezüglich $W(t)$ aus (2.18) zusammen mit (2.20) folgendes ergibt:

$$\begin{aligned} I(W(t_0), t_0) &= \max_{C(t), w(t)} E_{t_0} \left\{ e^{-\rho \tilde{t}} U(C(\tilde{t})) \cdot h \right. \\ &\quad \left. + I(W(t_0), t_0) + \frac{\partial I(W(t), t)}{\partial t} \Big|_{t_0} \cdot h \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left. \frac{\partial I(W(t), t)}{\partial W} \right|_{t_0} \cdot (W(t) - W(t_0)) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 I(W(t), t)}{\partial W^2} \right|_{t_0} \cdot (W(t) - W(t_0))^2 \\
& + o(h) \Big\} \text{ mit } \tilde{t} \in [t_0, t_0 + h].
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Die Operanden des Erwartungswertes in (2.21) werden nun analysiert. Zunächst kann der Erwartungswertoperator aufgrund seiner Linearität auf jeden Summanden einzeln angewandt werden. Der Summand der ersten Zeile aus (2.21) ergibt damit im Grenzwert $h \rightarrow 0$ und $\eta \in [0, 1]$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} E_{t_0} \{ e^{-\rho t_0 + \eta h} U(C(t_0 + \eta h)) \cdot h \} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{-\rho t_0} U(C(t_0)) \cdot h \tag{2.22}$$

Der Erwartungswert in (2.22) fällt weg, da das Argument für $h \rightarrow 0$ und daher $\tilde{t} = t_0$ bekannt ist.

Der erste Term in Zeile zwei von (2.21) ist invariant bezüglich der Anwendung des Erwartungswertoperators. Er wird auf beiden Seiten der Gleichung abgezogen und tritt daher im folgenden nicht mehr auf.

Der zweite Term in Zeile zwei bleibt unter Wegfall der Erwartungswertbildung unverändert stehen, da der Term zum Zeitpunkt t_0 bereits bekannt ist.

Aus dem gleichen Grunde lassen sich die nur zum Zeitpunkt t_0 ausgewerteten Terme in Zeile drei von (2.21) vor den E_{t_0} -Operator ziehen. Anschließend werden $E_{t_0}\{W(t) - W(t_0)\}$ und $E_{t_0}\{(W(t) - W(t_0))^2\}$ durch die zuvor gewonnenen Ausdrücke (2.12) und (2.13) substituiert. In den übriggebliebenen Termen kommt nur noch t_0 und nicht mehr t vor, so daß durch eine weitere Substitution $t \rightarrow t_0$ und Division durch h , das in allen Termen als Faktor auftritt, folgende Schreibweise möglich wird:

$$0 = \max_{C(t), w(t)} \phi(w, C; W, t). \tag{2.23}$$

Dabei ist mit $I_t := I(W(t), t)$

$$\begin{aligned}
\phi(w, C; W, t) &= e^{-\rho t} U(C(t)) + \frac{\partial I_t}{\partial t} + \frac{\partial I_t}{\partial W} ((w(t)(\alpha - r) + r)W(t) - C(t)) \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 I_t}{\partial W^2} \sigma^2 w^2(t) W^2(t).
\end{aligned} \tag{2.24}$$

2.2.3 Bestimmung der Extremalbedingungen

Es gibt damit folgende notwendigen Bedingungen für die Existenz eines Extremums:

1.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial C} \phi(w^*, C^*; W, t) &= \phi_C(w^*, C^*; W, t) \\
&= e^{-\rho t} U'(C^*) - \frac{\partial}{\partial W} I_t \\
&\stackrel{!}{=} 0
\end{aligned} \tag{2.25}$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial w} \phi(w^*, C^*; W, t) &= \phi_w(w^*, C^*; W, t) \\
&= (\alpha - r)W(t) \frac{\partial}{\partial W} I_t + \frac{\partial^2}{\partial W^2} I_t w^*(t) W^2(t) \sigma^2 \\
&\stackrel{!}{=} 0
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Als hinreichendes Kriterium für ein Maximum gilt in Verbindung mit (2.25) und (2.26) die negative Definitheit der Hessematrix H : $H_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \phi$, die hier folgende Gestalt annimmt:

$$H = \begin{pmatrix} \phi_{ww} & \phi_{wC} \\ \phi_{Cw} & \phi_{CC} \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

Mit $\phi_{ww} = \frac{\partial^2}{\partial w^2} \phi$, $\phi_{wC} = \frac{\partial^2}{\partial w \partial C} \phi$, $\phi_{Cw} = \frac{\partial^2}{\partial C \partial w} \phi$, $\phi_{CC} = \frac{\partial^2}{\partial C^2} \phi$. H ist genau dann negativ definit, wenn die quadratische Form in $\vec{x}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ kleiner Null ist. Daher:

$$\vec{x}^T H \vec{x} < 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{2.28}$$

Falls H symmetrisch ist, daher $\phi_{wC} = \phi_{Cw}$ gilt, läßt sich (2.28) auch durch das Unterdeterminantenkriterium ausdrücken. Hier ist

$$\phi_{wC} = \phi_{Cw} = 0. \tag{2.29}$$

Damit besitzt (2.23) speziell dann ein Maximum, falls

$$\phi_{ww} < 0 \text{ und } \det \begin{pmatrix} \phi_{ww} & \phi_{wC} \\ \phi_{Cw} & \phi_{CC} \end{pmatrix} = \phi_{ww} \cdot \phi_{CC} > 0 \iff \phi_{CC} < 0 \tag{2.30}$$

erfüllt ist.

Es ist

$$\phi_{CC} = e^{-\rho t} U''(C) < 0, \tag{2.31}$$

da $U'' < 0$ angenommen wurde. Weiterhin gilt wegen $\frac{\partial^2}{\partial W^2} I_t < 0$

$$\phi_{ww} = W^2(t) \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial W^2} I_t < 0. \tag{2.32}$$

ϕ ist damit streng konkav. Es genügt daher die Bedingungen (2.23), (2.25) und (2.26) zur Bestimmung eines Maximums zu überprüfen. Die folgenden Abschnitte setzen spezielle Funktionen für $U(\cdot)$ und $B(\cdot, \cdot)$ ein, um explizite Lösungen zu erhalten.

2.3 Konstante relative Risikoaversion

Für das oben angegebene partielle Differentialgleichungssystem (2.23), (2.25) und (2.26) läßt sich keine allgemeine geschlossene Lösung angeben. Für die Spezialfälle der konstanten relativen Risikoaversion ($R = -C \frac{U''(C)}{U'(C)} = \text{const.}$) und der konstanten absoluten

Risikoaversion ($A = -\frac{U''(C)}{U'(C)} = \text{const.}$)³ ist jedoch die Angabe einer expliziten Lösung möglich. Hier wird ausschließlich die konstante relative Risikoaversion betrachtet.

Es gelte

$$U(C) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma}(C^\gamma - 1), & \gamma \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ \ln C, & \gamma = 0. \end{cases} \quad (2.33)$$

Damit gilt

$$R = -C \frac{U''(C)}{U'(C)} = 1 - \gamma =: \delta = \text{const.} \quad (2.34)$$

Damit lassen sich die Extremalbedingungen wie folgt formulieren:

$$0 = \frac{1-\gamma}{\gamma} e^{\frac{-\rho t}{1-\gamma}} \left(\frac{\partial}{\partial W} I_t \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + \frac{\partial}{\partial t} I_t + rW \frac{\partial}{\partial W} I_t - \frac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2} \frac{\left(\frac{\partial}{\partial W} I_t \right)^2}{\frac{\partial^2}{\partial W^2} I_t} \quad (2.35)$$

$$C^*(t) = \left(e^{\rho t} \frac{\partial}{\partial W} I_t \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (2.36)$$

$$w^*(t) = -\frac{\alpha-r}{\sigma^2 W} \frac{\frac{\partial}{\partial W} I_t}{\frac{\partial^2}{\partial W^2} I_t} \quad (2.37)$$

$$\text{mit } I(W(T), T) = \frac{1}{\gamma} \epsilon^{1-\gamma} e^{-\rho T} W^\gamma(T) (= B(W(T), T)) \text{ für } 0 < \epsilon \ll 1 \quad (2.38)$$

Durch den Ansatz

$$\bar{I}(W(t), t) = b(t) \cdot \frac{1}{\gamma} e^{-\rho t} W^\gamma(t) \quad (2.39)$$

und Einsetzen in (2.35) läßt sich eine gewöhnliche Differentialgleichung für $b(t)$ gewinnen:

$$\dot{b}(t) = \mu b(t) - (1-\gamma) b^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(t) \quad (2.40)$$

mit

$$\mu := \rho - \gamma \left(\frac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2(1-\gamma)} + r \right) \quad (2.41)$$

und der Randbedingung $b(T) = \epsilon^{1-\gamma}$. Ohne Lösung von (2.40) ist bereits die Angabe (2.36) und (2.37) möglich:

$$C^*(t) = b^{\frac{1}{\gamma-1}}(t) \cdot W(t) \quad (2.42)$$

$$w^*(t) = w^* = \frac{\alpha-r}{\sigma^2(1-\gamma)} = \frac{\alpha-r}{\sigma^2 \delta}. \quad (2.43)$$

(2.43) leuchtet unmittelbar ein:

- Mit steigender Risikoscheu (δ) und steigender Varianz (σ^2) sinkt der Anteil der unsicheren Anlage im Portefeuille.
- Mit wachsender Differenz zwischen den Erträgen aus unsicherer und sicherer Anlage steigt der Anteil der unsicheren Anlage im Portefeuille.

³vgl. Merton, R. C.: „Continuous-Time Finance“, S. 117

Mit $\nu = \mu/(1 - \gamma)$ ist die Lösung von (2.40):

$$b(t) = \left(\frac{1 + (\nu\epsilon - 1)e^{\nu(t-T)}}{\nu} \right)^{1-\gamma}. \quad (2.44)$$

Damit $\bar{I}(W(t), t)$ reell bleibt, muß wegen $\gamma \in [0, 1)$ der Ausdruck in der Klammer von (2.44) positiv sein. Es ergibt sich für $C^*(t)$

$$C^*(t) = \begin{cases} \frac{\nu}{1 + (\nu\epsilon - 1)e^{\nu(t-T)}} W(t) & \text{für } \nu \neq 0 \\ \frac{1}{T-t-\epsilon} W(t) & \text{für } \nu = 0. \end{cases} \quad (2.45)$$

2.3.1 Zur Bedeutung von ϵ und ν

ϵ drückt nach (2.38) den Wert des Nachlasses für den Anleger aus. Für $\epsilon = 0$ besitzt der Nachlaß keinen Wert. Steigt ϵ , so steigt auch die Bewertung des Nachlasses.

Weiterhin ist

$$\nu = \frac{\rho - \gamma \left(\frac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2(1-\gamma)} + r \right)}{1 - \gamma} = \frac{\rho}{\delta} - \left(1 - \frac{1}{\delta} \right) \left(\frac{(\alpha-r)^2}{2\sigma^2\delta} + r \right) = \nu(\rho, \delta, \alpha, \sigma, r). \quad (2.46)$$

ν ist damit eine Funktion der fünf Variablen: Gegenwartspräferenz (ρ), Risikoaversion (δ), erwarteter Ertrag und Streuung der unsicheren Anlage (α und σ) und erwarteter Ertrag der sicheren Anlage (r).

Die partiellen Ableitungen liefern weitere Informationen über ν :

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \nu(\rho, \delta, \alpha, \sigma, r) = \frac{1}{\delta} \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \nu(\rho, \delta, \alpha, \sigma, r) = \frac{(-2\rho\sigma^2 - 2r\sigma^2 + \alpha^2 - 2\alpha r + r^2)\delta - 2\alpha^2 + 4\alpha r - 2r^2}{2\delta^3\sigma^2} \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \nu(\rho, \delta, \alpha, \sigma, r) = \frac{\alpha - r}{\sigma^2} \left(\frac{1}{\delta^2} - \frac{1}{\delta} \right) \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \nu(\rho, \delta, \alpha, \sigma, r) = \frac{(\alpha - r)^2}{\sigma^3} \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta^2} \right) \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \nu(\rho, \delta, \alpha, \sigma, r) &= -1 + \frac{1}{\delta} \left(1 + \frac{\alpha - r}{\sigma^2} \right) - \frac{1}{\delta^2} \frac{\alpha - r}{\sigma^2} \\ &= \frac{1}{\delta} - 1 + \frac{\alpha}{\delta\sigma^2} - \frac{\alpha}{\sigma^2\delta^2} + \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{1}{\delta^2} - \frac{1}{\delta} \right) r. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Zur Untersuchung der Monotonieigenschaften sollen zusätzlich die folgenden Ungleichungen, die als Normalfall angesehen werden können, gelten:

- $\rho > 0$: Heutiger Konsum wird höher bewertet als späterer.
- $\sigma > 0$: Mathematische Forderung.
- $\delta > 0$: Forderung aus der Modellannahme der konstanten relativen Risikoaversion.

- $\alpha > 0, r > 0$: Erwartete Erträge sind positiv, da sonst keine Anlage erfolgen würde.
- $\alpha > r$: Der erwartete Ertrag der riskanten Anlage ist höher als der der sicheren. Dies sollte für einen „normalen“ Kapitalmarkt mit risikoscheuen Anlegern als Teilnehmer der Fall sein.

Aus diesen Bedingungen folgt zusammen mit den entsprechenden partiellen Ableitungen:

- (2.47): ν ist streng monoton steigend in ρ .
- (2.49): Für $\delta < / > 1$ ist ν streng monoton steigend/fallend in α .
- (2.50): ν ist streng monoton steigend in σ .

An dieser Stelle soll eine weitere mathematische Analyse von ν unterbleiben. Statt dessen sei auf den nächsten Abschnitt verwiesen, der die Auswirkungen der unabhängigen Variablen auf das Ergebnis (2.45) anschaulich erläutert.

2.3.2 Diskussion der Lösung

Abbildung 2.1 zeigt die Lösung (2.45) für ein festes $\nu = 1$ und verschiedene ϵ .

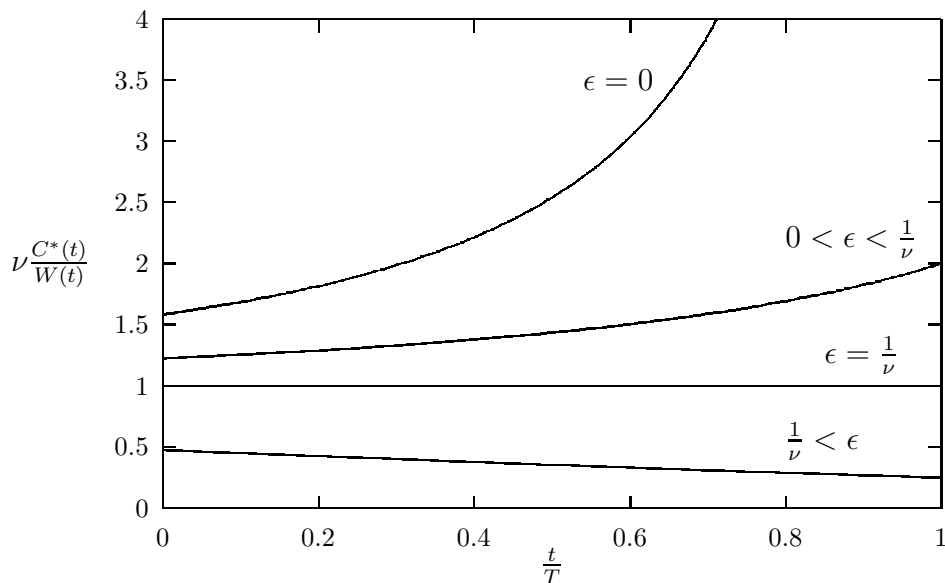


Abbildung 2.1: Verhältnis des Konsums zum Gesamtvermögen über die Zeit

1. $\epsilon = 0$:

Für diesen Fall wird der Nachlaß mit Null bewertet. Es gilt daher $B(W(T), T) = 0$. Weiterhin hat (2.45) für $t = T$ eine Polstelle. Dies läßt sich dadurch erklären, daß nur das Verhältnis $C^*(t) : W(t)$ betrachtet wird. Da der Nachlaß keine Bewertung

erfährt, ist es offensichtlich, daß das Vermögen zum Zeitpunkt $t = T$ gleich Null sein muß, damit es zuvor zu einem möglichst großen Konsum führen kann. Damit ist die ökonomische Entsprechung der mathematischen Polstelle geklärt.

2. $0 < \epsilon < \nu^{-1}$: Hier erfährt der Nachlaß eine geringe Bewertung, so daß das Endvermögen ungleich Null ist ($W(T) \neq 0$). Damit entfällt auch die Polstelle bei $t = T$.
3. $\epsilon = \nu^{-1}$: In diesem Spezialfall bleibt das Verhältnis C^*/W über die gesamte Zeit konstant gleich ν . ν ist daher das Konsum-Vermögensverhältnis, das sich einstellt, wenn der Nachlaß gerade so bewertet wird, daß das Konsum-Vermögensverhältnis konstant bleibt.
4. $\nu^{-1} < \epsilon$: Über die Zeit sinkt der Konsum zu Gunsten der Vermögensbildung.

Wird umgekehrt $\epsilon = \text{const.}$ gehalten, so läßt sich der funktionale Zusammenhang der Lösung (2.45) mit den unabhängigen Variablen der Funktion $\nu(\rho, \delta, \alpha, \sigma, r)$ untersuchen.

2.4 Behandlung von Spezialfällen

2.4.1 Dynamisches Verhalten ohne Bewertung des Nachlasses

Dieser Abschnitt untersucht das dynamische Verhalten von (2.45) für $\epsilon = 0$. Der Nachlaß besitzt also keinen Wert für das Individuum.

Es sei $V(t) := C^*(t)/W(t)$. Damit folgt

$$\dot{V}(t) = V^2(t)e^{\nu(t-T)} > 0. \quad (2.52)$$

Wird die mittlere erwartete Änderungsrate des Vermögens $\overset{\circ}{W}(t)$ aus (2.14) ins Verhältnis zu $W(t)$ gesetzt, so ergibt sich:

$$\frac{\overset{\circ}{W}(t)}{W(t)} = \alpha_* - V(t) \quad (2.53)$$

mit

$$\alpha_* = \frac{(\alpha - r)^2}{\sigma^2(1 - \gamma)} + r, \quad (2.54)$$

das, wie in Abschnitt (2.5.2) gezeigt werden wird, den erwarteten Ertrag aus dem optimalen Portefeuille darstellt. Wegen

$$\frac{d}{dt} \frac{\overset{\circ}{W}(t)}{W(t)} = -\dot{V}(t) < 0 \quad (2.55)$$

nimmt die erwartete Steigerungsrate des Vermögens mit der Zeit ab. (2.53) zeigt die vom Individuum geplante Änderung des Vermögens.

Ist $\alpha_* > V(0)$, so besitzt (2.53) wegen der Monotonie von $V(t)$ genau eine Nullstelle. $\alpha_* - V(\bar{t}) \stackrel{!}{=} 0$ bestimmt daher einen Zeitpunkt $\bar{t}$, $0 < \bar{t} < T$, ab dem das Individuum von der Vermögensvermehrung zum Vermögensabbau zwecks Konsum überzugehen plant.

Ist $\alpha_* \leq V(0)$, so plant das Individuum bereits jetzt mehr zu konsumieren, als es durch Einkommen aus der Kapitalanlage erhält.

2.4.2 Betrachtung auf unbegrenzte Zeit

Eine Betrachtung des Optimierungsproblems mit unbegrenztem Zeithorizont bringt einige Vereinfachungen mit sich. Die optimale Entscheidungsregel läßt sich zwar auch auf dem Wege der Grenzwertbildung für $T \rightarrow \infty$ in den bereits erhaltenen Gleichung gewinnen, erfordert jedoch die Lösung eines partiellen Differentialgleichungssystems. Hier wird nun gezeigt, daß durch eine geschickte Substitution die Zeitabhängigkeit von t aufgehoben werden kann. Es sei

$$\begin{aligned}
 J[W(t), t] &:= e^{\rho t} I[W(t), t] \\
 &= \max_{C, w} E_t \left\{ \int_t^\infty e^{-\rho(s-t)} U(C(s)) \, ds \right\} \\
 &= \max_{C, w} E_t \left\{ \int_0^\infty e^{-\rho v} U(C(v+t)) \, dv \right\} \\
 &= \max_{C, w} E \left\{ \int_0^\infty e^{-\rho v} U(C(v)) \, dv \right\}. \tag{2.56}
 \end{aligned}$$

t tritt jetzt in (2.56) nicht mehr auf. Wird (2.56) nach I aufgelöst und in (2.23) und (2.24) eingesetzt, so folgt nach Division durch $e^{-\rho t}$:

$$0 = \max_{C, w} \left[U(C) - \rho J(W) + J'(W)([w(\alpha - r) + r]W - C) + \frac{1}{2} J''(W) \sigma^2 w^2 W^2 \right]. \tag{2.57}$$

Die weitere Rechnung⁴ führt zur Bestimmung der optimalen Konsumfunktion C_∞^* und optimalen Portefeuille-Zusammensetzung w_∞^* .

Diese Ergebnisse lassen sich auch, wie bereits erwähnt, durch Grenzbetrachtung aus (2.45) gewinnen: Wird (2.45) im Grenzwert $T \rightarrow \infty$ betrachtet, so ergibt sich mit (2.46):

$$C_\infty^*(t) := \lim_{T \rightarrow \infty} C^*(t) = \nu W(t) = \left[\frac{\rho}{\delta} - \left(1 - \frac{1}{\delta} \right) \left(\frac{(\alpha - r)^2}{2\sigma^2 \delta} + r \right) \right] W(t). \tag{2.58}$$

An (2.43) ändert sich nichts:

$$w_\infty^*(t) = \frac{\alpha - r}{\sigma^2 \delta} \tag{2.59}$$

⁴vgl. Merton, R. C.: „Continuous-Time Finance“, S. 109

2.5 Ökonomische Interpretation der optimalen Entscheidungsregeln

2.5.1 Unabhängigkeit von Portefeuillewahl und Konsumententscheidung

(2.58) zeigt, daß die Konsumententscheidung losgelöst von der Portefeuille-Zusammensetzung getroffen werden kann, da (2.58) w^* nicht enthält.

Gilt zusätzlich $\delta = 1$, ist die Nutzenfunktion daher logarithmisch, so wird der rechte Term innerhalb der eckigen Klammern von (2.58) zu Null. Dadurch wird die Wahl des Konsums zusätzlich unabhängig von den Parametern des Kapitalmarktes (α, σ, r).

(2.43) zeigte bereits, daß die Portefeuillewahl nur von den Parametern des Kapitalmarktes und der Risikobereitschaft abhängt. Dies ist jedoch nicht weiter erstaunlich, da die Risikobereitschaft des Anlegers durch die konstant angenommene relative Risikoscheu unabhängig vom Vermögen ist. Weiterhin ist die Entwicklung am Kapitalmarkt unabhängig von den Entscheidungen des Anlegers. Dies wird im Modell durch die Annahme eines die Kursschwankungen produzierenden Wiener-Prozesses bewirkt und entspricht der Modellierung der atomistischen Marktstruktur.

2.5.2 Erwartungswert und Varianz des Gesamtportefeuilles

Da die optimale Portefeuille-Zusammensetzung w^* konstant ist, hat das Gesamtportefeuille aus sicherer und unsicherer Anlage einen konstanten Erwartungswert und eine konstante Varianz:

$$\begin{aligned}\alpha_* &= E\{w^*(\alpha + \Delta Y) + (1 - w^*)r\} \\ &= w^*\alpha + (1 - w^*)r \\ &= \frac{(\alpha - r)^2}{\sigma^2\delta} + r\end{aligned}\tag{2.60}$$

$$\begin{aligned}\sigma_*^2 &= \text{var}[w^*(\alpha + \Delta Y) + (1 - w^*)r] \\ &= w^{*2}\sigma^2 \\ &= \frac{(\alpha - r)^2}{\sigma^2\delta^2}\end{aligned}\tag{2.61}$$

2.5.3 Das Phelps-Ramsey Problem

Das Phelps-Ramsey Problem beschreibt die Suche nach einer optimalen Konsumfunktion für den Fall, daß das Einkommen durch eine unsichere Kapitalanlage erbracht wird. Die Parameter dieser unsicheren Einkunft aus der Kapitalanlage α_* und σ_*^2 sind vorigen Abschnitt gewonnen worden. Sie lassen sich durch entsprechende Umformungen in (2.58) einsetzen, und man erhält:

$$C^*(t) = \left[\frac{\rho}{\delta} + (\delta - 1) \left(\frac{\alpha_*}{\delta} - \frac{\sigma_*^2}{2} \right) \right] W(t) = V \cdot W(t)\tag{2.62}$$

Im folgenden wird die Abhängigkeit des Konsums von Änderungen in der Varianz und dem Erwartungswert des Anlageportefeuilles untersucht.

Untersucht werde $\partial C^*/\partial\theta$, der Konsum in Abhängigkeit von einem bestimmten Parameter. Diese Abhängigkeit läßt sich folgendermaßen aufteilen:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}C^* = \underbrace{\frac{\partial}{\partial\theta}C^* + \left(\frac{\partial}{\partial\theta}C^*\right)\Big|_{\bar{I}_0}}_{\text{Substitutionseffekt}} - \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial\theta}C^*\right)\Big|_{\bar{I}_0}}_{\text{Einkommenseffekt}} \quad (2.63)$$

Dabei bedeutet die Notation $\bar{I}_0$, daß I_0 bei der Ableitung konstant gesetzt wird.

Wird (2.39) an der Stelle $t = 0$ ausgewertet und nach θ abgeleitet, so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\theta}\bar{I}(W(t), t)\Big|_{t=0} &= \frac{\partial}{\partial\theta}\left(b(t) \cdot \frac{1}{\gamma}e^{-\rho t}W^\gamma(t)\right)\Big|_{t=0} \\ 0 &= -\frac{1}{\delta-1}W(0)\frac{\partial}{\partial\theta}b(0) + b(0)\frac{\partial}{\partial\theta}W(0)\Big|_{\bar{I}_0} \end{aligned} \quad (2.64)$$

Aus (2.42) und (2.62) folgt $b(0) = V^{-\delta}$ und mit $W_0 := W(0)$ somit

$$\frac{\partial}{\partial\theta}W_0\Big|_{\bar{I}_0} = \frac{\delta}{1-\delta} \frac{W_0}{V} \frac{\partial}{\partial\theta}V. \quad (2.65)$$

Es folgt das Einsetzen von α_* und σ_*^2 für θ :

1. $\theta = \alpha_*$:

$$(2.62) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\alpha_*}V = \frac{\delta-1}{\delta} \quad (2.66)$$

$$(2.65) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\alpha_*}W_0\Big|_{\bar{I}_0} = -\frac{W_0}{V}. \quad (2.67)$$

Der Substitutionseffekt beträgt daher

$$\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_*}C^*\right)\Big|_{\bar{I}_0} = \left(W_0\frac{\partial}{\partial\alpha_*}V + V\frac{\partial}{\partial\alpha_*}W_0\right)\Big|_{\bar{I}_0} = -\frac{W_0}{\delta} < 0. \quad (2.68)$$

Damit ergibt sich der Einkommens- bzw. Wohlstandseffekt zu:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_*}C^* - \left(\frac{\partial}{\partial\alpha_*}C^*\right)\Big|_{\bar{I}_0} = W_0 > 0. \quad (2.69)$$

Einkommens- und Substitutionseffekt ergeben zusammen $W_0\frac{\delta-1}{\delta}$, was sich folgendermaßen interpretieren läßt:

- $0 < \delta < 1$:

Für Anleger mit geringer Risikoscheu überwiegt der Substitutions- den Einkommenseffekt. Sie werden daher heute zu Gunsten eines späteren höheren Konsums verzichten.

- $\delta > 1$:

Die Anleger besitzen eine höhere Risikoscheu und werden lieber heute weniger konsumieren, als später einen höheren aber unsicheren erwarteten Konsum zur Verfügung zu haben.

- $\delta = 1$:

Für den Fall der logarithmischen Bernoulli-Nutzenfunktion heben sich Substitutions- und Einkommenseffekt genau auf.

Analog

2. $\theta = \sigma_*^2$:

$$(2.62) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial(-\sigma_*^2)} V = \frac{1}{2}(\delta - 1) \quad (2.70)$$

$$(2.65) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial(-\sigma_*^2)} W_0 \Big|_{\bar{I}_0} = -\frac{\delta W_0}{2V}. \quad (2.71)$$

Der Substitutionseffekt beträgt daher

$$\left(\frac{\partial}{\partial(-\sigma_*^2)} C^* \right) \Big|_{\bar{I}_0} = \left(W_0 \frac{\partial}{\partial(-\sigma_*^2)} V + V \frac{\partial}{\partial(-\sigma_*^2)} W_0 \right) \Big|_{\bar{I}_0} = -\frac{W_0}{2} < 0. \quad (2.72)$$

Damit ergibt sich der Einkommens- bzw. Wohlfandseffekt zu:

$$\frac{\partial}{\partial(-\sigma_*^2)} C^* - \left(\frac{\partial}{\partial(-\sigma_*^2)} C^* \right) \Big|_{\bar{I}_0} = \frac{\delta}{2} W_0 > 0. \quad (2.73)$$

Einkommens- und Substitutionseffekt ergeben jetzt zusammen $W_0(\frac{\delta-1}{2})$ und besitzen die gleichen Eigenschaften wie für $\theta = \alpha_*$.

Zur weiteren Analyse des Konsumverhaltens des Anlegers diene nun der Vergleich der Konsumelastizitäten bezüglich des Erwartungswertes und der Varianz ohne Aufteilung in Substitutions- oder Einkommenseffekt. Es sei

$$E_{\alpha_*} := \alpha_* \frac{\frac{\partial}{\partial \alpha_*} C^*}{C^*} = \alpha_* \frac{\delta - 1}{\delta V} \quad (2.74)$$

und

$$E_{\sigma_*^2} := \sigma_*^2 \frac{\frac{\partial^2}{\partial \sigma_*^2} C^*}{C^*} = -\sigma_*^2 \frac{\delta - 1}{2V}. \quad (2.75)$$

Abbildung 2.2 zeigt den Verlauf der bezogenen Elastizität $E/(\alpha_*/V)$ in Abhängigkeit von der Risikoscheu für die zwei Fälle $2\alpha_*/\sigma_*^2$ größer und kleiner eins. Dabei wurde das Vorzeichen von $E_{\sigma_*^2}$ zwecks einer besseren Vergleichsmöglichkeit umgedreht. Es ist zu beachten, daß das rechte Diagramm einen anderen Maßstab besitzt.

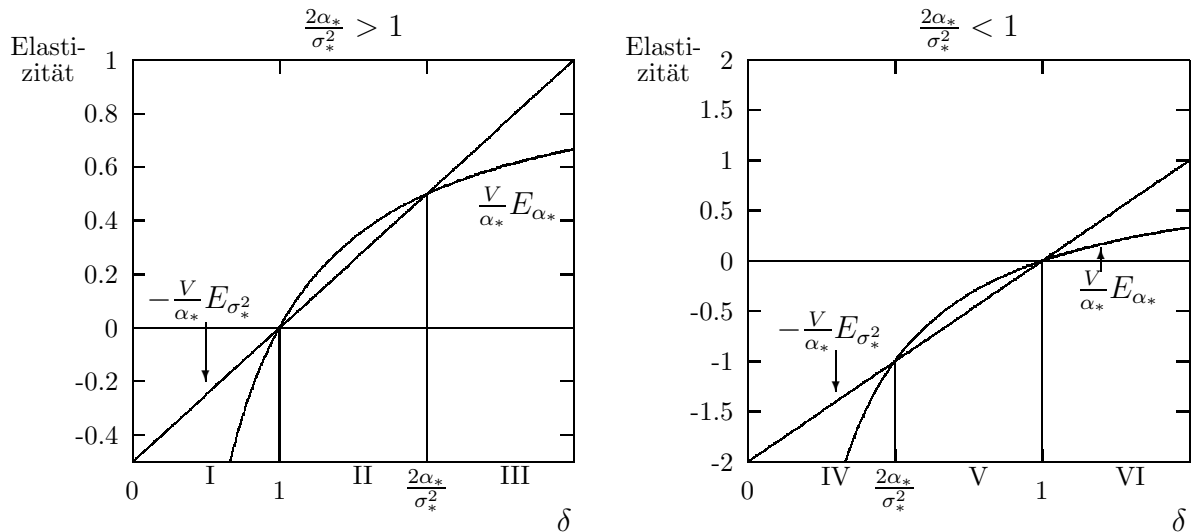


Abbildung 2.2: Konsumelastizität in Abhängigkeit von der Risikoscheu

Diskussion:

Das Verhältnis $2\alpha_*/\sigma_*^2$ beschreibt die Güte des Gesamtportefeuilles. Es werden die Fälle $2\alpha_*/\sigma_*^2 < > 1$ in den Bereichen I-VI in Abbildung 2.2 untersucht. Die Elastizitäten des Konsumverhaltens bezüglich der Parameter α_* und σ_*^2 zeigen anschaulich die Sensibilität der Anleger in Bezug auf Änderungen dieser Parameter auf einem bestimmten Niveau. Zum besseren Verständnis seien alle möglichen Fälle explizit durchgespielt:

- $2\alpha_*/\sigma_*^2 > 1$ („günstiges“ Portefeuille)
 - Bereich I (geringe Risikoscheu):
Der wenig risikoscheue Anleger wird bei günstigen Portefeuilles auf eine Erhöhung des Erwartungswertes sensibler als auf eine Verringerung der Varianz mit einer Verringerung des Konsums reagieren.
 - Bereich II (geringe bis mittlere Risikoscheu):
Der gering bis mittel-risikoscheue Anleger wird bei günstigen Portefeuilles auf eine Erhöhung des Erwartungswertes sensibler als auf eine Verringerung der Varianz mit einer Steigerung des Konsums reagieren.
 - Bereich III (hohe Risikoscheu):
Der stark risikoscheue Anleger wird bei günstigen Portefeuilles auf eine Verringerung der Varianz sensibler als auf eine Erhöhung des Erwartungswertes mit einer Steigerung des Konsums reagieren.
- $2\alpha_*/\sigma_*^2 < 1$ („ungünstiges“ Portefeuille)

- Bereich IV (geringe Risikoscheu):

Der wenig risikoscheue Anleger wird bei ungünstigen Portefeuilles auf eine Erhöhung des Erwartungswertes sensibler als auf eine Verringerung der Varianz mit einer Verringerung des Konsums reagieren. Dies ist analog zu Bereich I, jedoch ist der Betrag der Verringerung größer als im Bereich I.

- Bereich V (mittlere bis hohe Risikoscheu):

Der mittel bis stark-risikoscheue Anleger wird bei ungünstigen Portefeuilles auf eine Verringerung der Varianz sensibler als auf eine Erhöhung des Erwartungswertes mit einer Verringerung des Konsums reagieren. Dies steht im Gegensatz zu Bereich II.

- Bereich VI (hohe Risikoscheu):

Der stark risikoscheue Anleger wird bei ungünstigen Portefeuilles auf eine Verringerung der Varianz sensibler als auf eine Erhöhung des Erwartungswertes mit einer Steigerung des Konsums reagieren. Dies ist analog zu Bereich III, jedoch ist der Betrag der Vergrößerung größer als im Bereich III.

Das Verhalten der Anleger läßt sich für die Grenzfälle $2\alpha_*/\sigma_*^2 \rightarrow 0$ und $2\alpha_*/\sigma_*^2 \rightarrow \infty$ sehr anschaulich beschreiben.

Im ersten Fall wird das Verhältnis aus erwartetem Ertrag und Varianz des Portefeuilles immer geringer und die Bereiche IV und V fallen zusammen. Da alle Anleger als mehr oder weniger risikoscheu angenommen sind, wird in diesem Fall das hohe Risiko dominant, so daß die Varianz gegenüber dem erwarteten Ertrag für die Konsumententscheidung ausschlaggebend wird.

Im zweiten Fall werden die Eigenschaften des Portefeuilles immer günstiger und die Bereiche II und III fallen zusammen. Jetzt dominiert der erwartete Ertrag die Varianz in der Konsumententscheidung.

2.6 Verallgemeinerung auf mehrere Anlagen

Das Modell aus Abschnitt 2.2 läßt sich auf mehrere Anlagen verallgemeinern. Ausgehend von den Beziehungen in Abschnitt 2.1 ergibt sich in Vektorschreibweise:

$$\vec{w}(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ \vdots \\ w_{m-1}(t) \\ w_m(t) \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

Zur leichten Unterscheidung zwischen der i -ten Komponente eines Vektors und dem i -ten Vektor gelte aufbauend auf der vorigen Gleichung folgende Notation: $(\vec{w})_i = w_i$. Damit ist mit $n := m - 1$ $w_m = 1 - \sum_{i=1}^n w_i$. $\alpha_m = r$ sei der Ertrag der sicheren Anlage. Die Komponente w_m ist daher wieder redundant und kann entfallen. Dies geschieht durch die Betrachtung von $n = m - 1$ -dimensionalen Vektoren. Der Beziehung (2.1) wird durch die Einführung von $\vec{r}$ Rechnung getragen. (2.8) und (2.9) lauten in Vektorschreibweise:

$$E_{t_0}\{W(t) - W(t_0)\} = [\vec{w}'(t_0)(\vec{\alpha} - \vec{r}) + r]W(t_0)h - C(t_0)h + o(h) \quad (2.77)$$

und

$$E_{t_0}\{[W(t) - W(t_0)]^2\} = \vec{w}'(t_0)\Sigma\vec{w}(t_0)W^2(t_0)h + o(h) \quad (2.78)$$

mit $(\Sigma)_{ij} = \sigma_{ij}$ der Kovarianzmatrix der riskanten Anlagen, die symmetrisch und positiv definit ist, und $(\vec{r})_i = r$ für $i \in [0, n]$.

(2.57) ergibt sich damit zu

$$0 = \max_{C,w} (U(C) - \rho J(W) + J'(W) \left([\vec{w}'(t)(\vec{\alpha} - \vec{r}) + r]W - C \right) + \frac{1}{2} J''(W) \vec{w}' \Sigma w W^2). \quad (2.79)$$

Die optimalen Entscheidungsregeln für den Konsum und die Portefeuille-Zusammensetzung nehmen folgende Gestalt an:

$$C_{\infty}^*(t) = \left(\frac{\rho}{1 - \gamma} - \gamma \left[\frac{(\vec{\alpha} - \vec{r})' \Sigma^{-1} (\vec{\alpha} - \vec{r})}{2(1 - \gamma)^2} + \frac{r}{1 - \gamma} \right] \right) W(t) \quad (2.80)$$

und

$$\vec{w}_{\infty}^*(t) = \frac{1}{1 - \gamma} \Sigma^{-1} (\vec{\alpha} - \vec{r}). \quad (2.81)$$

$\ddot{y}$

3 Konsumallokation und Portefeuille-Zusammenstellung unter verallgemeinerten Bedingungen

Dieses Kapitel beschäftigt sich wie das vorangegangene mit der Bestimmung des optimalen Konsums und der optimalen Portefeuillewahl. Diese Ergebnisse werden jedoch für allgemeinere Nutzenfunktionen und Preisentwicklungen abgeleitet. Zusätzlich findet Einkommen Berücksichtigung, das durch Anstellungsverhältnisse erzielt wird. Von Anfang an werden durchgehend mehrere Anlagen bei verschiedenen Kapitalmarktstrukturen (mit/ohne sichere Anlage) betrachtet. Die gesamte Analyse in diesem Kapitel ist stark an Itô-Prozessen orientiert. Es beginnt mit der Vorstellung der stochastischen Differentialgleichung, die zur Modellierung der Anlagenpreisentwicklung herangezogen wird. Um die Ableitung weitergehender Aussagen zu ermöglichen, wird anschließend die Budget-Gleichung in einer anderen Weise als im vorigen Kapitel hergeleitet und formuliert. Unter Voraussetzung einer logarithmischen Normalverteilung der Anlagenpreise werden wichtige Ergebnisse abgeleitet. Die Diskussion von geschlossen lösbaren Konstellationen wird durch eine numerische Rechnung veranschaulicht. Das Kapitel schließt mit der Behandlung von diskontinuierlichen Zustandsänderungen. Dadurch wird die Modellierung von zufällig steigenden Einkünften aus Beschäftigungsverhältnissen ermöglicht.

3.1 Ableitung grundlegender Gleichungen

3.1.1 Anlagepreisentwicklung

Es sei angenommen, daß die Kurse für die Anlagen $P_i(t)$ durch eine Itô-Prozeß erzeugt werden. Es gelte daher:

$$\frac{d P_i(t)}{P_i(t)} = \alpha_i(\vec{P}(t), t) dt + \sigma_i(\vec{P}(t), t) dz_i. \quad (3.1)$$

Darin sei $\alpha_i(\vec{P}(t), t)$ die zum Zeitpunkt t und gegebenem Gesamtpreisgefüge $(\vec{P}(t))_i = P_i(t)$ erwartete prozentuale Preisänderung pro Zeiteinheit. Es ist zu beachten, daß diese Vereinbarung im Gegensatz zu der des vorigen Kapitels steht. σ_i^2 ist entsprechend die Varianz. Die dz_i stellen normalverteilte gedächtnislose stationäre Prozesse dar, die die Korrelationen σ_{ij} untereinander besitzen¹.

¹für eine kleine Einführung und kurze Darstellung der wichtigsten Eigenschaften von Itô-Prozessen siehe Anhang A.2

Beschreibt (3.1) speziell eine geometrische Brown'sche Bewegung, so sind die α_i und σ_i^2 konstant. In diesem Fall sind die Preise P_i logarithmisch normalverteilt, da die Preisänderung auf der linken Seite in (3.1) auf den Preis selbst bezogen ist. Dies ist für die spätere Rechnung nützlich. Die Bedeutung der logarithmischen Normalverteilung sowie die anschauliche Interpretation von (3.1) wird in Abschnitt 3.3.1 näher diskutiert.

3.1.2 Schrittweise Entwicklung der Budgetgleichung

Analog zum vorigen Kapitel erfolgt die Ableitung der zeitkontinuierlichen Budget-Gleichung aus dem Grenzübergang $h \rightarrow 0$ des zeitdiskreten Modells mit der Zeitspanne h zwischen zwei Handelsperioden. Zusätzlich sei zunächst angenommen, daß das gesamte Einkommen aus Kapitaleinkünften besteht. $W(t)$ sei das Gesamtvermögen und $P_i(t)$ der Kurs der i -ten Anlage zum Zeitpunkt t . Diese Werte beziehen sich auf den Anfang einer handelsfreien Periode und bleiben für die Dauer h konstant. Entsprechend seien die $N_i(t)$ die Anteile an der i -ten Anlage für den Zeitraum t bis $t + h$. $C(t)$ sei der im Zeitraum t bis $t + h$ pro Zeiteinheit geplante Konsum.

Zum Zeitpunkt t ergibt sich das in die i -te Anlage investierte Kapital durch Multiplikation der in der vorigen Periode $(t - h)$ gekauften Anteile mit dem jetzt (t) gültigen Preis. Somit stellt sich das Gesamtvermögen zum Zeitpunkt t wie folgt dar:

$$W(t) = \sum_{i=1}^n N_i(t-h)P_i(t) \quad (3.2)$$

Wird der Konsum $C(t)h$ in der Periode t bis $t + h$ und die erneute Anlage auf dem Kapitalmarkt für die nächste Periode berücksichtigt, so läßt sich folgende Gleichung gewinnen:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n N_i(t-h)P_i(t)}_{\text{Vermögen aus } t} \stackrel{!}{=} \underbrace{C(t)h}_{\text{Konsum in } [t, t+h]} + \underbrace{N_i(t)P_i(t)}_{\text{Kosten für Neuanlage in } [t, t+h]} - C(t)h = \sum_{i=1}^n [N_i(t) - N_i(t-h)]P_i(t) \quad (3.3)$$

Zur Gewinnung einer Differenzengleichung wird die nächste Periode betrachtet. Dies ist durch Substitution von t gegen $t + h$ zu erreichen:

$$\begin{aligned} -C(t+h)h &= \sum_{i=1}^n [N_i(t+h) - N_i(t)]P_i(t+h) \\ -C(t+h)h &= \sum_{i=1}^n [N_i(t+h) - N_i(t)] \cdot [P_i(t+h) - P_i(t)] \\ &\quad + \sum_{i=1}^n [N_i(t+h) - N_i(t)]P_i(t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

und

$$W(t+h) = \sum_{i=1}^n N_i(t)P_i(t+h) \quad (3.5)$$

Im Grenzübergang $h \rightarrow 0$ ergibt sich wegen $\lim_{h \rightarrow 0} N_i(t+h) - N_i(t) = dN_i(t)$ und $\lim_{h \rightarrow 0} P_i(t+h) - P_i(t) = dP_i(t)$:

$$-C(t+h)h = \sum_{i=1}^n dN_i(t) dP_i(t) + \sum_{i=1}^n dN_i(t)P_i(t) \quad (3.6)$$

und trivial:

$$W(t) = \sum_{i=1}^n N_i(t)P_i(t). \quad (3.7)$$

Das totale Differential von (3.7) ergibt mit Itô's Lemma:

$$dW = \sum_{i=1}^n N_i dP_i + \underbrace{\sum_{i=1}^n dN_i P_i + \sum_{i=1}^n dN_i dP_i}_{-C(t) dt}. \quad (3.8)$$

Werden zusätzlich differentielle Einkünfte aus Einkommen $dy(t)$ berücksichtigt, die nicht aus Kapitalanlagen resultieren, schreibt sich (3.8) als

$$dW = \sum_{i=1}^n N_i dP_i(t) + dy(t) - C(t) dt. \quad (3.9)$$

Durch $w_i(t) := N_i(t)P_i(t)/W(t)$ wird der Anteil des Vermögens, der in der Anlage i investiert ist, beschrieben. Diese Vereinbarung ist äquivalent zu derjenigen im vorigen Kapitel. Mit w_i und der nach $dP_i(t)$ aufgelösten Gleichung (3.1) läßt sich $dP_i(t)$ in (3.9) eliminieren:

$$dW = \sum_{i=1}^n w_i W \alpha_i dt + \sum_{i=1}^n w_i W \sigma_i dz_i + dy(t) - C(t) dt \quad (3.10)$$

Analog zu Abschnitt 2.6 erfährt eine eventuell vorhandene risikolose Anlage eine Sonderbehandlung. Dies ist notwendig, um eine Singularität der Kovarianzmatrix Σ auszuschließen. Aus dem gleichen Grund wird die lineare Unabhängigkeit der Zahlungsströme aus den Wertpapieren gefordert. Dies stellt jedoch keine Einschränkung dar, da linear abhängige Wertpapiere auf dem Kapitalmarkt bei gleichem Preis entweder vollständig redundant sind, oder sie bei unterschiedlichem Preis von anderen dominiert werden. Die entsprechende Umformung aus Abschnitt 2.6 liefert:

$$dW = \sum_{i=1}^{n-1} w_i W (\alpha_i - r) dt + \sum_{i=1}^{n-1} w_i W \sigma_i dz_i + dy(t) - (rW - C) dt \quad (3.11)$$

Dabei ist r wieder der Zinssatz der sicheren Anlage.

3.2 Ableitung der optimalen Anlage und Konsumallokation

Ausgangspunkt für die Optimierung ist wie in Abschnitt 2.2.1 Gleichung (2.15):

$$\max_{C(t), \vec{w}(t)} E_0 \left\{ \int_0^T e^{-\rho t} U(C(t)) dt + B(W(T), T) \right\}. \quad (3.12)$$

Hier wird zusätzlich zu den Annahmen in 2.2.1 gefordert, daß $\partial B / \partial W > 0$ und $\partial^2 B / \partial W^2 < 0$ gilt, die Nachlaßbewertungsfunktion daher konkav in W ist.

Die folgende Analyse stützt sich auf die Methoden der stochastischen dynamischen Programmierung in Verbindung mit Lagrange'schen Optimierung.

Es sei

$$J(W, \vec{P}, t) := \max_{C, \vec{w}} E_t \left\{ \int_t^T e^{-\rho s} U(C(s)) ds + B(W(T), T) \right\} \quad (3.13)$$

mit E_t dem auf $W(t) = W$ und $P_i(t) = P_i$ bedingtem Erwartungswert. Ferner sei

$$\phi(C, \vec{w}; W, \vec{P}, t) := U(C, t) + \mathcal{L}J \quad (3.14)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{L} := & \frac{\partial}{\partial t} + \left(\sum_{i=1}^n w_i \alpha_i W - C \right) \frac{\partial}{\partial W} + \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i \frac{\partial}{\partial P_i} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} w_i w_j W^2 \frac{\partial^2}{\partial W^2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_i P_j \sigma_{ij} \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_i W w_j \sigma_{ij} \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial W} \end{aligned} \quad (3.15)$$

dem Dynkin Operator, der auf die Funktion J angewandt wird.

An dieser Stelle erfolgt die Verwendung eines Satzes aus stochastischen dynamischen Programmierung, der unter den hier gegebenen Bedingungen² zu folgender Aussage führt:

$$0 = \max_{\{C, \vec{w}\}} \phi(C, \vec{w}; W, \vec{P}, t) \quad (3.16)$$

3.2.1 Aufbau der Lagrange-Funktion

Durch Langrange'sche Optimierung von (3.16) unter der Nebenbedingung $1 - \sum_{i=1}^n w_i = 0$ ergibt sich folgende Lagrange-Funktion:

$$L := \phi + \lambda \left(1 - \sum_{i=1}^n w_i \right). \quad (3.17)$$

²für eine umfassendere Diskussion s. Merton, R. C.: „Continuous-Time Finance“, S. 128

Durch Differentiation von (3.17) nach den zu bestimmenden Variablen C und $\vec{w}$ sowie dem Lagrange-Multiplikator λ ergeben sich unter Verwendung von (3.14) und (3.15) folgende Gleichungen:

$$0 = L_C(C^*, \vec{w}^*) = U_C(C^*, t) - J_W \quad (3.18)$$

$$0 = L_{w_k}(C^*, \vec{w}^*) = -\lambda + J_W \alpha_k W + J_{WW} \sum_{j=1}^n \sigma_{kj} w_j^* W^2 + \sum_{j=1}^n J_{jW} \sigma_{kj} P_j W \quad (3.19)$$

$$0 = L_\lambda(C^*, \vec{w}^*) = 1 - \sum_{i=1}^n w_i^* \quad (3.20)$$

mit den Abkürzungen

$$J_W := \frac{\partial}{\partial W} J, \quad J_t := \frac{\partial}{\partial t} J, \quad J_C := \frac{\partial}{\partial C} J, \quad J_i := \frac{\partial}{\partial P_i} J,$$

$$J_{ij} := \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} J, \quad J_{WW} := \frac{\partial^2}{\partial W^2} J, \quad J_{jW} := \frac{\partial^2}{\partial P_j \partial W} J.$$

Die Gleichungen (3.18), (3.19) und (3.20) bilden zusammen ein System von notwendigen Bedingungen für ein Extremum. Zur Untersuchung von Existenz und Art dieses Extremums dient analog zu Abschnitt 2.2.3 die Hessematrix:

$$\begin{aligned} H &= \begin{pmatrix} L_{w_1 w_1} & L_{w_1 w_2} & \dots & L_{w_1 w_n} & L_{C w_1} \\ L_{w_2 w_1} & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \\ L_{w_n w_1} & & & L_{w_n w_n} & L_{C w_n} \\ L_{w_1 C} & \dots & & L_{w_n C} & L_{CC} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} J_{WW} W^2 \sigma_1^2 & J_{WW} W^2 \sigma_{12} & \dots & J_{WW} W^2 \sigma_{1n} & 0 \\ J_{WW} W^2 \sigma_{21} & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \\ J_{WW} W^2 \sigma_{n1} & & & J_{WW} W^2 \sigma_n^2 & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & U_{CC} \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{array}{cccc|c} & & & & 0 \\ & J_{WW} W^2 \Sigma & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ \hline 0 & \dots & & 0 & U_{CC} \end{array} \right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Da Σ symmetrisch und positiv definit ist, genügt wegen $U_{CC} < 0$ die strenge Konkavität der Gesamtbewertung J bezüglich des Wohlstands W ($J_{WW} < 0$) für die Existenz eines Maximums im inneren des betrachteten Gebietes.

3.2.2 Bestimmung der Lösung

Das weitere Vorgehen zur expliziten Bestimmung von C^* und $\vec{w}$ ist wie folgt: Zunächst werden die $n + 2$ impliziten Gleichungen (3.18), (3.19) und (3.20) bezüglich C^* , $\vec{w}$ und λ als Funktionen von J_W , J_{WW} , J_{jW} , W , P und t gelöst. Darauf werden C^* und $\vec{w}^*$ in (3.16) eingesetzt. (3.16) ist damit zu einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung geworden, die der Randbedingung $J(W, \vec{P}, T) = B(W, T)$ gehorchen muß. Die Lösung dieser partiellen Differentialgleichung wird sich in der Praxis nur für wenige Spezialfälle geschlossen angeben lassen. In den weiteren Abschnitten werden vornehmlich gerade solche Fälle untersucht. Es sei nun jedoch angenommen, daß eine Lösung von (3.16) existiert und bekannt ist. Durch Einsetzen dieser Lösung für J in (3.18) und (3.19) lassen sich die Lösungen für C^* und $\vec{w}$ bestimmen. Nun die Schritte im Einzelnen:

C^* kann durch Auflösen von (3.18) bestimmt werden:

$$C^* = G(J_W, t). \quad (3.22)$$

Darin ist G die Umkehrfunktion von U_C bezüglich C^* .

Die Bestimmung von $\vec{w}$ gestaltet sich etwas aufwendiger, ist jedoch, da (3.19) ein lineares Gleichungssystem für $\vec{w}$ darstellt, prinzipiell möglich. Um die Angabe der Lösung zu vereinfachen, seien die Symbole

$$(\Sigma^{-1})_{ij} = \nu_{ij}$$

und

$$\Gamma := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \nu_{ij}$$

eingeführt. Nach Elimination von λ in (3.19) folgt:

$$w_k^* = h_k(P, t) + m(P, W, t)g_k(P, t) + f_k(P, W, t), \quad k = 1, \dots, n \quad (3.23)$$

Dabei gelten die folgenden Abkürzungen:

$$\begin{aligned} h_k(P, t) &:= \sum_{j=1}^n \frac{\nu_{kj}}{\Gamma} & \sum_{k=1}^n h_k &= 1 \\ m(P, W, t) &:= \frac{-J_w}{W J_{WW}} \\ g_k(P, t) &:= \Gamma^{-1} \sum_{i=1}^n \nu_{ki} \left(\Gamma \alpha_i - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \nu_{ij} \alpha_j \right) & \sum_{k=1}^n g_k &= 0 \\ f_k(P, W, t) &:= - \left(\Gamma J_{kW} P_k - \sum_{i=1}^n J_{iW} P_i \sum_{j=1}^n \nu_{kj} \right) (\Gamma W J_{WW})^{-1} & \sum_{k=1}^n f_k &= 0. \end{aligned}$$

Nun erfolgt das Einsetzen von w^* und C^* in (3.16):

$$0 = U(G, t) + J_t + J_W \left(\frac{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \nu_{kj} \alpha_k W}{\Gamma} - G \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^n J_i \alpha_i P_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n J_{ij} \sigma_{ij} P_i P_j + \frac{W}{\Gamma} \sum_{j=1}^n J_{jW} P_j \\
& - \frac{J_W}{\Gamma J_{WW}} \left(\sum_{k=1}^n \Gamma J_{kW} P_k \alpha_k - \sum_{j=1}^n J_{jW} P_j \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \nu_{kl} \alpha_l \right) \\
& + \frac{J_{WW} W^2}{2\Gamma} - \frac{1}{2\Gamma J_{WW}} \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n J_{jW} J_{kW} P_j P_k \sigma_{kj} \Gamma - \left(\sum_{i=1}^n J_{iW} P_i \right)^2 \right] \\
& - \frac{J_W^2}{2\Gamma J_{WW}} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \nu_{kl} \alpha_k \alpha_l \Gamma - \left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \nu_{kl} \alpha \right)^2 \right] \quad (3.24)
\end{aligned}$$

Dabei muß (3.24) der Randbedingung $J(W, \vec{P}, T) = B(W, T)$ genügen. Diese Lösung stellt die Basis für die folgenden Abschnitte dar.

3.2.3 Vereinfachung durch Existenz der risikolosen Anlage

Die recht unhandliche Größe von (3.24) soll nun durch die Annahme, daß eine der Anlagen $i \in \{1, \dots, n\}$ risikolos ist, vereinfacht werden. Diese Vereinfachung ergibt sich daraus, daß die sichere Anlage getrennt betrachtet wird, und das System der restlichen unsicheren Anlagen nicht mehr der Nebenbedingung $\sum_{i=1}^{n-1} w_i = 1$ zu gehorchen braucht, da diese Bedingung durch die entsprechende Wahl w_n befriedigt werden kann. Es folgt damit:

$$w_k^* = -\frac{J_W}{J_{WW} W} \sum_{j=1}^n \nu_{kj} (\alpha_j - r) - \frac{H_{kW} P_k}{J_{WW} W}, \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (3.25)$$

Die partielle Differentialgleichung für J lautet unter der gleichen Randbedingung wie zuvor jetzt wie folgt:

$$\begin{aligned}
0 = & U(G, t) + J_t + J_W(rW - G) + \sum_{i=1}^n J_i \alpha_i P_i \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n J_{ij} \sigma_{ij} P_i P_j - \frac{J_W}{J_{WW}} \sum_{j=1}^n \Gamma J_{jW} P_j (\alpha_j - r) \\
& - \frac{1}{2J_{WW}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n J_{iW} J_{jW} P_i P_j \sigma_{ij} - \frac{J_W^2}{2J_{WW}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \nu_{ij} (\alpha_i - r) (\alpha_j - r). \quad (3.26)
\end{aligned}$$

Auch wenn (3.25) und (3.26) eine geringere Komplexität besitzen als (3.23) und (3.24), so mangelt es ihnen doch an „intuitiver Verständlichkeit“. Daher werden in den nächsten Abschnitten einige Beispiele vorgestellt, die auf diese Ergebnisse zurückgreifen.

3.3 Logarithmische Normalverteilung der Preise

Es wurde bereits bemerkt, daß für den Fall, daß der zugrunde liegende stochastische Prozeß eine geometrische Brown'sche Bewegung darstellt, α_k und σ_k Konstanten sind,

und die Wertpapierpreise logarithmisch normalverteilt sind. Es gilt weiterhin $\partial J / \partial P = 0$, so daß sich (3.24) sich zu

$$0 = U(G, t) + J_t + J_W \left(\frac{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \nu_{kj} \alpha_k W}{\Gamma} - G \right) + \frac{J_{WW} W^2}{2\Gamma} - \frac{J_W^2}{2\Gamma J_{WW}} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \nu_{kl} \alpha_k \alpha_l \Gamma - \left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \nu_{kl} \alpha \right)^2 \right] \quad (3.27)$$

vereinfacht. (3.23) reduziert sich auf

$$w_k^* = h_k + m(W, t) g_k. \quad (3.28)$$

3.3.1 Bemerkungen zur Annahme der logarithmischen Normalverteilung und der geometrischen Brown'schen Bewegung

Dieser Abschnitt diskutiert Aspekte, die für und wider der Annahme einer Normalverteilung bzw. einer logarithmischen Normalverteilung sprechen. Abbildung 3.1 zeigt diese beiden Verteilungsdichtefunktionen³.

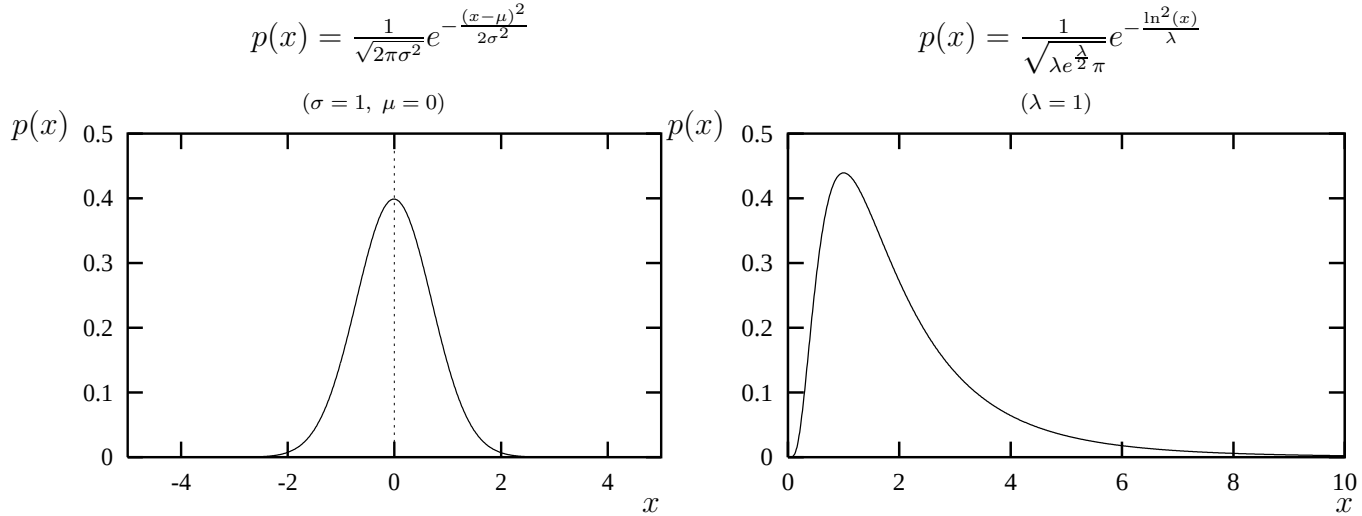


Abbildung 3.1: Normalverteilung und logarithmische Normalverteilung

Die Normalverteilung links in Abbildung 3.1 besitzt nach dem zentralen Grenzwertsatz der Statistik eine große Bedeutung. Jeder Summenprozeß, dessen einzelne Summanden in ihrer Verteilung der Lindeberg'schen Bedingung gehorchen, nähert sich im Grenzwert für unendlich viele Summanden dieser Verteilung an. Die Lindeberg'sche Bedingung ist

³s. auch Anhang A.2

insbesondere erfüllt, wenn die Verteilungen der einzelnen Summanden alle gleich sind, und die Verteilungen endliche erste und zweite Momente besitzen⁴.

Im Falle der Preisbildung von Wertpapieren ist es nicht ohne weiteres einzusehen, wie man sich diese Preisbildung durch eine Summation von vielen einzelnen Preisen entstanden vorstellen kann. Damit entfällt die theoretische Begründung für die Annahme einer Normalverteilung. Eine weitere Unstimmigkeit in der Annahme einer Normalverteilung ist die Symmetrie derselben und damit die endliche Wahrscheinlichkeit, negative Preise zu erhalten. Dieses Problem läßt sich nicht durch die Wahl von μ und σ in den Griff bekommen. Dies legt den Verdacht nahe, daß die Normalverteilung die tatsächliche Verteilung der Wertpapierpreise nur unzureichend beschreibt.

Die logarithmische Normalverteilung besitzt diese Nachteile nicht. Sie soll ausgehend von (3.1) diskutiert werden:

Für den Fall der geometrischen Brown'schen Bewegung wird aus (3.1) bei skalarer Betrachtung und Multiplikation mit $P(t)$:

$$dP(t) = \underbrace{\alpha P(t) dt}_A + \underbrace{\sigma P(t) dz}_B. \quad (3.29)$$

Darin ist der Term A für das systematische Wachstum des Kurses mit der Zeit verantwortlich. Dieser Term repräsentiert daher den erwarteten Gewinn eines Wertpapiers durch die Anlage für eine gewisse Zeit. Ohne den Term B stellt (3.29) eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung dar, deren Lösung die Exponentialfunktion ist. Entscheidend für diese Form der Lösung ist das Auftreten von $P(t)$ in A . Ohne dieses $P(t)$ wäre die Lösung ein Polynom ersten Grades. Die exponentielle Entwicklung des Kurses über die Zeit läßt sich aus der Realität gut begründen, da jede Geldanlage durch den Zinseszinsseffekt ein exponentielles Wachstum besitzt. Der Term A in (3.29) ist damit ausreichend motiviert. Der Term B beschreibt hingegen einen Rauschprozeß, der der systematischen Kursentwicklung überlagert ist. Ebenso wie im Term A bewirkt die Multiplikation mit $P(t)$ eine Transformation des normalverteilten Rauschprozesses mit einer Exponentialfunktion. $P(t)$ ist daher logarithmisch normalverteilt. Dies bedeutet, daß das Rauschen über dem „idealen“ erwarteten Kurs proportional zu dessen Höhe ist. Dies entspricht dem Sachverhalt, daß nicht die absolute sondern die relative Kursänderung in der Praxis von wirtschaftlicher Bedeutung ist.

Es ist zu beachten, daß sich die logarithmische Normalverteilung nicht auf den zeitlichen Verlauf des Kurses bezieht. Es ist statt dessen eine Schar von Musterprozessen für eine geometrische Brown'sche Bewegung zu untersuchen, deren Werte zu einem festen Zeitpunkt betrachtet werden. Die Verteilung dieser Werte zu festen Zeitpunkten gehorcht

⁴vgl. Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A.: „Taschenbuch der Mathematik“, S. 677

dann einer logarithmischen Normalverteilung.

Zusätzlich folgt aus der Multiplikation mit $P(t)$, daß $P(t)$ nicht negativ werden kann. Dadurch entfällt auch der Einwand, der bei der Verwendung der Normalverteilung gegen das Auftreten von negativen Preisen mit endlicher Wahrscheinlichkeit gestellt wurde.

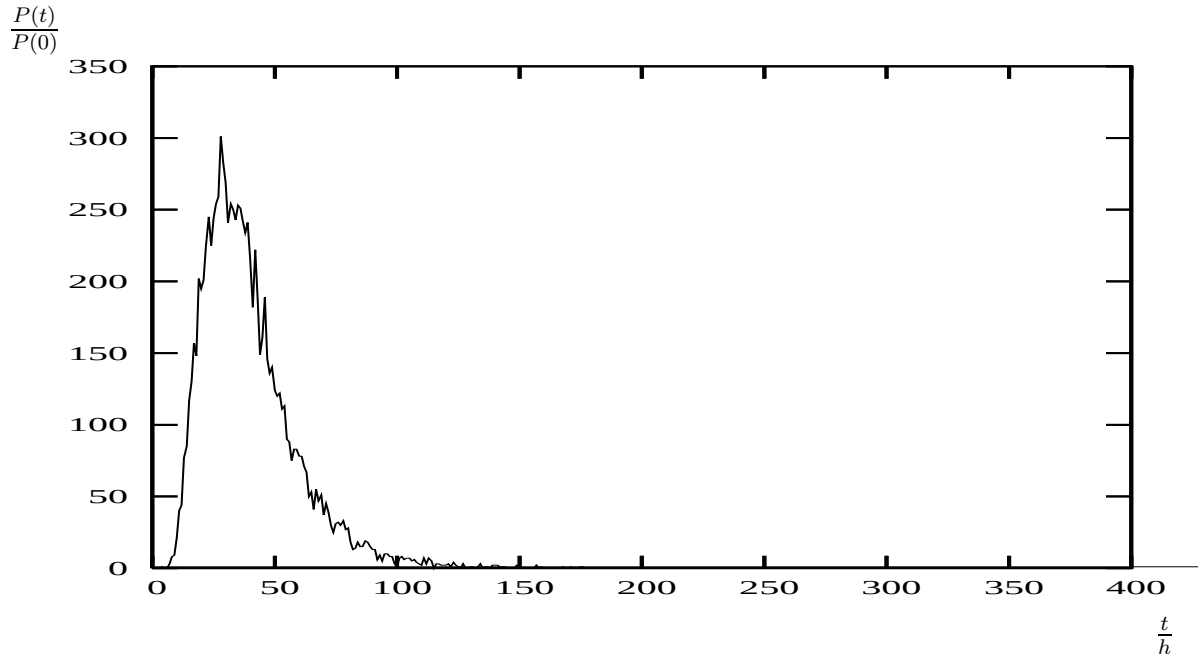


Abbildung 3.2: Beispielhafte Kursentwicklung in Form einer geometrischen Brown'schen Bewegung

Abbildung 3.2 zeigt eine Kursentwicklung, die auf dem Rechner durch numerische Simulation von (3.29) gewonnen wurde. Dabei wurde der Term A durch $\alpha = 0$ zu Null gesetzt. Der im Mittel vorhandene exponentielle Trend nach oben ist in dieser Abbildung daher nicht sichtbar.

3.3.2 Das Separationstheorem

Gegeben seien n Anlagen mit den Preisen P_i , die logarithmisch normalverteilt seien. Steht zusätzlich ein bestimmtes Gesamtbudget zur Verfügung, so gilt:

- (a) Es existiert ein eindeutig bestimmtes, aus den n Anlagen linear kombinierbares Anlagenpaar, das jedem Anleger die gleichen Möglichkeiten bezüglich der Disposition der Nutzenfunktion, der Wohlstandsverteilung über die Zeit und dem Zeithorizont bietet, wie die ursprünglichen n Anlagen.
- (b) Der Preis der kombinierten Anlage P_f ist wieder logarithmisch normalverteilt.

- (c) Sei δ_k der Anteil der kombinierten Anlage 1 an dem Wert, der in die k -te Anlage investiert ist und λ_k der Anteil der kombinierten Anlage 2 an dem Wert, der in die k -te Anlage investiert ist, dann gilt:

$$\delta_k = h_k + \frac{1-\eta}{\nu} g_k, \quad k = 1, \dots, n \quad (3.30)$$

und

$$\lambda_k = h_k - \frac{\eta}{\nu} g_k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.31)$$

g_k und h_k finden sich in Gleichung (3.28). ν und η sind beliebige Konstanten.

Beweis:

(a): Gleichung (3.28) ist die Darstellung einer Gerade in Parameterform mit h_k als Aufpunkt, g_k als Richtungsvektor und $m(W, t)$ als Parameter. Wegen $\sum_{i=1}^n w_k^* = 1$ liegt diese Gerade innerhalb einer Hyperebene mit dem Normalenvektor $\vec{1} := (1, \dots, 1)^T$. Werden die kombinierten Anlagen so gewählt, daß sie zwei verschiedene Punkte auf der Geraden repräsentieren, so sind sie linear unabhängig und bieten die gleichen Dispositionsmöglichkeiten. Abbildung 3.3 zeigt diesen Zusammenhang für $n = 3$ anschaulich. Dabei gilt wegen $\sum_{i=1}^n w_k^* = 1$, daß die Summe aus dem in die erste kombinierte Anlage investierten Wertanteil a und dem in die zweite investierten Wertanteil $a - 1$ gleich eins sein muß:

$$\vec{w}^* = h_k + m(W, t)g_k \stackrel{!}{=} a\vec{\delta} + (1-a)\vec{\lambda} \quad (3.32)$$

(b): Es sei $V := N_f P_f$ der Gesamtwert der jeweiligen kombinierten Anlage (kurz: Fond) mit N_f der Anzahl Anteile am Fond. N_k sei die Anzahl Anteile des Fond an der Anlage k . Dann ist $\mu_k = N_k P_k / V$ der Anteil des in diesem Fond enthaltenen Vermögens, der in Anlage k investiert ist und

$$V = \sum_{k=1}^n N_k P_k. \quad (3.33)$$

Differentiation mit Itô's Lemma ergibt

$$\begin{aligned} dV &= \sum_{k=1}^n N_k dP_k + \underbrace{\sum_{k=1}^n P_k dN_k + \sum_{k=1}^n dP_k dN_k}_A \\ &= N_f dP_f + \underbrace{P_f dN_f + dP_f dN_f}_B. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Dabei ist A der Nettozuwachs der Fonds durch Nicht-Kapital-Einkommen und B der Nettowert der neu ausgegebenen Anteile. Wegen $A = B$ folgt:

$$N_f dP_f = \sum_{k=1}^n N_k dP_k. \quad (3.35)$$

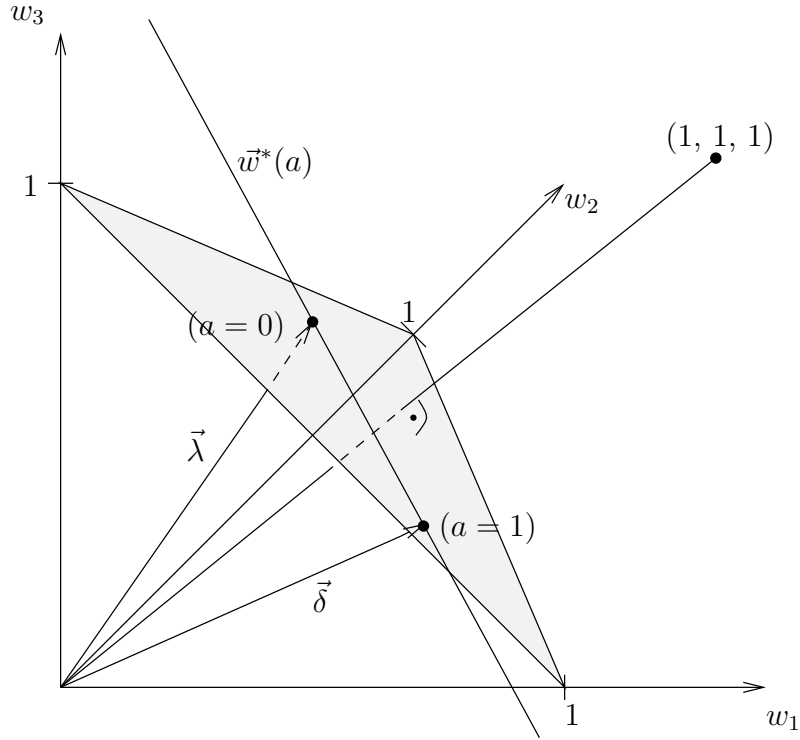


Abbildung 3.3: Veranschaulichung des Separationstheorems

Durch Einsetzen von V und μ_k ergibt dies:

$$\begin{aligned} \frac{dP_f}{P_f} &= \sum_{k=1}^n \mu_k \frac{dP_k}{P_k} \\ &= \sum_{k=1}^n \mu_k \alpha_k dt + \sum_{k=1}^n \mu_k \sigma_k dz_k \end{aligned} \quad (3.36)$$

Mit Itô's Lemma folgt:

$$P_f(t) = P_f(0) \exp \left[\left(\sum_{k=1}^n \mu_k \alpha_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_k \mu_j \sigma_{kj} \right) t + \sum_{k=1}^n \mu_k \sigma_k \int_0^t dz_k \right] \quad (3.37)$$

bzw. in Vektorschreibweise:

$$P_f(t) = P_f(0) \cdot \underbrace{e^{(\vec{\mu} \vec{\alpha} - \frac{1}{2} \vec{\mu}^T \Sigma \vec{\mu})t}}_A \cdot \underbrace{e^{\vec{\mu} \vec{\sigma} \int_0^t dz_k}}_B. \quad (3.38)$$

Darin beschreibt A ein exponentielles Wachstum der Preise in t und B eine Transformation des normalverteilten Zufallsprozesses mit einer Exponentialfunktion, was zu einem logarithmisch-normalverteilten Zufallsprozeß führt. Der zweite Summand des Exponentialterms in A hat, als quadratische Form in $\vec{\mu}$ betrachtet, die gleiche Gestalt, wie eine mehrdimensionale Normalverteilung in $\vec{\mu}$.

(c): Das lineare Gleichungssystem (3.32) ist unterbestimmt. Es besitzt vier Variablen und führt auf zwei Gleichungen. Die Lösung beinhaltet daher zwei Freiheitsgrade. Durch Einsetzen des Ansatzes

$$\begin{aligned}\vec{\delta} &= b_{11}\vec{h} + b_{12}\vec{g} \\ \vec{\lambda} &= b_{21}\vec{h} + b_{22}\vec{g}\end{aligned}\quad (3.39)$$

in (3.32) ergibt sich:

$$a(b_{11}\vec{h} + b_{12}\vec{g}) + (1-a)(b_{21}\vec{h} + b_{22}\vec{g}) \stackrel{!}{=} \vec{h} + m\vec{g}. \quad (3.40)$$

(3.40) liefert für $\vec{h} \neq \vec{g}$ die folgenden zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned}a(b_{11} - b_{21}) + b_{21} &= 1 \\ a(b_{12} - b_{22}) + b_{22} &= m\end{aligned}\quad (3.41)$$

Durch geeignete Wahl von b_{11} und b_{12} entsteht die im Theorem (3.30) und (3.31) angegebene Form. $a(W, t; U)$ bestimmt sich zu

$$a(W, t; U) = \nu m(W, t) + \eta, \quad \nu \neq 0. \quad (3.42)$$

Es gilt zusätzlich:

$$\sum_{k=1}^n \delta_k = 1 \quad (3.43)$$

und

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1. \quad (3.44)$$

□

3.3.3 Berücksichtigung der sicheren Anlage

Bei Berücksichtigung der sicheren Anlage wird (3.25) maßgebend. Diese Gleichung vereinfacht sich für den Fall der logarithmisch-normalverteilten Preise weiter und lautet in Vektorschreibweise:

$$\vec{w}_{(n-1)}^* = m(W, t) \Sigma_{(n-1)}^{-1} (\vec{\alpha}_{(n-1)} - r \vec{1}_{(n-1)}) \quad (3.45)$$

Zu beachten ist, daß die Dimension der Vektoren nun nur noch $n - 1$ beträgt, was durch das entsprechende Suffix zum Ausdruck kommen soll. Durch dieses einfache Matrizenprodukt ist die Zusammensetzung des optimalen Portefeuilles bis auf einen Skalierungsfaktor bestimmt. w_n^* ergibt sich wieder wie bereits einige Male zuvor durch

$$w_n^* = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} w_k^* \quad (3.46)$$

(3.45) entspricht in einer anschaulichen geometrischen Deutung wieder einer Geraden, die innerhalb der Hyperebene $\vec{w}^* \vec{1} = 1$ verläuft. Bei Betrachtung im $\mathbb{R}^{n-1}$ geht diese Gerade durch den Koordinatenursprung. Zwei beliebige verschiedene Punkte auf dieser Geraden repräsentieren zwei Fonds, deren Aufnahme in das Portefeuille zur Erreichung aller möglichen Dispositionen ausreicht.

δ_k und λ_k ergeben sich aus:

$$\delta_k = \frac{1-\eta}{\nu} \sum_{j=1}^{n-1} \nu_{kj}(\alpha_j - r), \quad k = 1, \dots, n-1 \quad (3.47)$$

$$\lambda_k = -\frac{\eta}{\nu} \sum_{j=1}^{n-1} \nu_{kj}(\alpha_j - r), \quad k = 1, \dots, n-1 \quad (3.48)$$

$$\delta_n = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \delta_k, \quad \lambda_n = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \quad (3.49)$$

3.3.4 Analogie zur Erwartungswert-Varianz-Analyse von Tobin-Markowitz

Wie in Abschnitt 3.1.1 bereits angedeutet, hat die Annahme von logarithmisch-normalverteilten Anlagepreisen weitreichende vereinfachende Folgen für die analytische Berechnung des optimalen Portefeuilles. Es wurde gezeigt, daß unter dieser Annahme sämtliche Dispositionen mit nur zwei Fonds möglich sind. Diese Fonds sind zwei verschiedene Linearkombinationen der vorhandenen Wertpapiere. Die Zusammenstellung der Portefeuilles hängt ausschließlich von den Anlagen selbst (α_j, σ_{ij}) ab. Es besteht kein Zusammenhang mit Parametern, die von einem einzelnen Anleger bestimmt werden.

Es zeigt sich bereits eine gewisse Analogie zum klassischen CAPM, in dem jeder Anleger das Marktportefeuille und die sichere Anlage hält. Diese Analogie läßt sich verstärken, wenn der eine Fond die risikolose Anlage darstellt. Wird daher $\eta = 0$ gewählt, so beschreibt $\vec{\lambda}$ die sichere Anlage. Der Fond $\vec{\delta}$ besteht durch die Wahl von $\nu = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \nu_{ij}(\alpha_i - r)$ dagegen nur aus risikobehafteten Anlagen. Abbildung 3.4 zeigt den geometrischen Ort der dadurch erzeugten Kombinationen aus Portefeuilles in Form einer Geraden.

Das zeitkontinuierliche Modell ist damit in der Lage, allein durch die Annahme von logarithmisch-normalverteilten Anlagepreisen zu gleichen Ergebnissen zu kommen, wie das statische Erwartungswert-Varianz-Modell, das dafür jedoch die quadratische Nutzenfunktion und die Normalverteilung der Anlagepreise benötigt. Die Annahme einer logarithmischen Normalverteilung der Anlagenpreise läßt sich wesentlich besser theoretisch und empirisch rechtfertigen. Zusätzlich entfällt die restriktive und nur schwer zu begründende Annahme der quadratischen Nutzenfunktion.

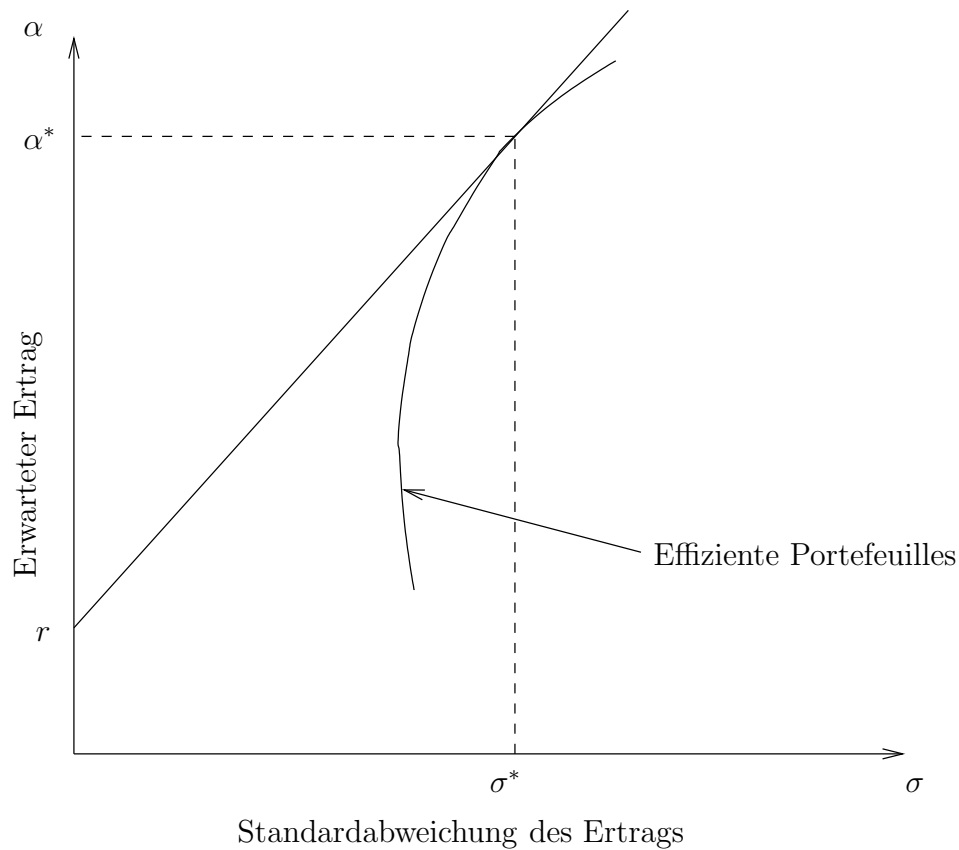


Abbildung 3.4: Bestimmung des optimalen Portefeuilles

Zusammengefaßt läßt sich feststellen, daß es bei Annahme einer logarithmischen Normalverteilung der Anlagenpreise ausreicht, nur eine risikolose Anlage und eine aus den risikobehafteten Anlagen zusammengesetzte Anlage, die im klassischen CAPM dem Marktportefeuille entspricht, und deren Preis ebenfalls logarithmisch-normalverteilt ist, zu betrachten. Dabei gelten die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i \alpha_i \\
 \sigma^2 &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \delta_i \delta_j \sigma_{ij} \\
 dz &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\delta_i \sigma_i}{\sigma} dz_i \\
 \delta_k &= \frac{\sum_{j=1}^{n-1} \nu_{kj} (\alpha_j - r)}{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \nu_{ij} (\alpha_j - r)}, \quad k = 1, \dots, n-1.
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

3.4 Geschlossene Lösungen für eine spezielle Klasse von Nutzenfunktionen

Die Annahme der logarithmischen Normalverteilung läßt sich wie im vorigen Abschnitt gesehen gut begründen und liefert gleichzeitig relativ einfache Resultate. Mit dieser Annahme und einer speziellen Klasse von Nutzenfunktionen ist eine geschlossene Angabe von Lösungen für die optimalen Konsumallokationen und die optimalen Portefeuille-Zusammensetzungen möglich.

In die Nutzenfunktion soll nun auch die zeitliche Präferenz mit $e^{-\rho t}$ eingeschlossen werden, so daß sich für die nun betrachteten Nutzenfunktionen folgende Gestalt ergibt:

$$U(C, t) = e^{-\rho t} V(C). \quad (3.51)$$

Dabei ist $V(C)$ eine Nutzenfunktion der HARA-Klasse, deren Mitglieder wie folgt beschrieben werden können:

$$V(C) = \frac{1-\gamma}{\gamma} \left(\frac{\beta C}{1-\gamma} + \eta \right)^\gamma \quad (3.52)$$

mit folgenden Restriktionen:

$$\gamma \neq 1, \quad \beta > 0, \quad \frac{\beta C}{1-\gamma} + \eta > 0, \quad \eta = 1 \text{ für } \gamma = -\infty. \quad (3.53)$$

Die absolute Risikoaversion A ergibt sich damit zu:

$$A(C) = -\frac{V''}{V'} = \left(\frac{C}{1-\gamma} + \frac{\eta}{\beta} \right)^{-1}. \quad (3.54)$$

Nun wird von dem Ergebnis des Abschnitts 3.3.4 Gebrauch gemacht, daß es ausreicht, nur eine risikolose Anlage und eine aus den risikobehafteten Anlagen zusammengesetzte Anlage zu betrachten. Das Einsetzen von (3.51) und (3.52) in (3.26) liefert:

$$0 = \frac{(1-\gamma)^2}{\gamma} e^{-\rho t} \left(\frac{e^{\rho t} J_W}{\beta} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + J_t + \left(\frac{(1-\gamma)\eta}{\beta} + rW \right) J_W - \frac{J_W^2}{J_{WW}} \frac{(\alpha - r)^2}{2\sigma^2} \quad (3.55)$$

Als Randbedingung werde zur Vereinfachung $B(W, T) = 0$ gesetzt. Es gibt daher keine Nachlaßbewertung und $J(W, T) = 0$ ist Randbedingung von (3.55). Die Lösung von (3.55) hat die folgende Form:

$$J(W, t) = \frac{\delta \beta^\gamma}{\gamma} e^{-\rho t} \left(\frac{\delta \left(1 - e^{-\frac{(\rho-\gamma\nu)(T-t)}{\delta}} \right)}{\rho - \gamma\nu} \right)^\delta \cdot \left(\frac{W}{\delta} + \frac{\eta}{\beta r} (1 - e^{-r(T-t)}) \right)^\gamma \quad (3.56)$$

mit $\delta = 1 - \gamma$ einem Maß für die Risikoaversion und

$$\nu = r + \frac{(\alpha - r)^2}{2\delta\sigma^2} \quad (3.57)$$

einem Parameter, der die Aussicht beschreibt, das Vermögen am Kapitalmarkt zu erhöhen. Der erste Summand in (3.57) ist proportional zum Ertrag der sicheren Anlage. Der zweite Summand bewertet die unsichere Anlage analog zu (2.43) nach der persönlichen Risikobereitschaft und den besseren Ertragsaussichten gegenüber der sicheren Anlage.

Die optimale Konsumallokation und Portefeuillestruktur folgt zu:

$$\begin{aligned} C^*(t) &= \frac{1-\gamma}{\beta} \left(\frac{e^{\rho t} J_W}{\beta} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} - \frac{(1-\gamma)\eta}{\beta} \\ &= \frac{(\rho - \gamma\nu) \left(W(t) + \frac{\delta\eta}{\beta r} (1 - e^{r(t-T)}) \right)}{\delta \left(1 - e^{\frac{(\rho - \gamma\nu)(t-T)}{\delta}} \right)} - \frac{\delta\eta}{\beta} \end{aligned} \quad (3.58)$$

und

$$\begin{aligned} w^*(t) &= -\frac{J_W}{J_{WW}W} \frac{\alpha - r}{\sigma^2} \\ w^*(t)W(t) &= \frac{\alpha - r}{\delta\sigma^2} W(t) + \frac{\eta(\alpha - r)}{\beta r\sigma^2} (1 - e^{r(t-T)}). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Dabei wurde w^* in (3.59) mit $W(t)$ multipliziert, um die Höhe des in dem Portefeuille angelegten Vermögens zu erhalten. Bemerkenswert an (3.58) und (3.59) ist, daß sie linear in $W(t)$ sind. Es läßt sich zeigen⁵, daß Nutzenfunktionen der HARA-Klasse die einzigen sind, die konkav sind und zu dieser linearen Beziehung führen.

Diskussion:

Zunächst wird (3.58) näher untersucht. Dazu wird dieser Ausdruck in mehrere Terme aufgespalten, die jeweils für sich getrennt diskutiert werden.

$$C^*(t) = \underbrace{\frac{\rho - \gamma\nu}{\delta}}_{C_0^*} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 - e^{\frac{\rho - \gamma\nu}{\delta} \cdot (t-T)}}}_{C_I^*} \cdot \underbrace{\left(W(t) + \frac{\delta\eta}{\beta r} (1 - e^{r(t-T)}) \right)}_{C_{II}^*} - \underbrace{\frac{\delta\eta}{\beta}}_{C_{III}^*}$$

Die Terme im einzelnen:

- C_0^* : Mit steigender Risikoscheu wird der Konsum zum jetzigen Zeitpunkt geringer. Mit zunehmender Gegenwartspräferenz ρ dagegen wird der Konsum verstärkt. Der Subtrahent $\gamma\nu$ beschreibt die Aussicht durch Konsumverzicht und Anlage auf dem Kapitalmarkt zu einem größeren Nutzen durch späteren höheren Konsum zu kommen. Ist diese mit der Risikobereitschaft bewertete Aussicht hoch, so erfolgt der heutige Konsumverzicht.

⁵vgl. Merton, R. C.: „Continuous-Time Finance“, S. 139 ff.

- C_I^* : Dieser Ausdruck besitzt Ähnlichkeit mit einem Ausdruck der bereits in Form von (2.45) gewonnen wurde. Er beschrieb dort das Verhältnis aus Konsum und Gesamtvermögen. Wird nur der erste Summand in C_{II}^* betrachtet, so ist dies hier nicht anders. Da keine Nachlaßbewertung vorgenommen wird, besitzt C_I^* bei $t = T$ eine Polstelle.

Zu klären bleibt die Bedeutung von $(\rho - \gamma\nu)/\delta$ ($= C_0^*$) im Argument der Exponentialfunktion in C_I^* . Ähnlich wie der Ausdruck C_0^* den Konsum in seiner Höhe beeinflußt, verschiebt C_I^* den Konsum zu früheren Zeitpunkten.

Es ist leicht einzusehen, daß das Produkt $C_0^* \cdot C_I^*$ immer positiv ist. Dieses Produkt ist in Abbildung 3.5 für verschiedene $(\rho - \gamma\nu)/\delta$ aufgezeichnet. Der Zeitmaßstab wurde dabei wegen der Polstelle auf $t \leq 0.9T$ beschränkt. Zur besseren Übersicht sind in Abbildung 3.5 Niveaulinien eingezeichnet, die einen Eindruck vom Verlauf der Funktion geben.

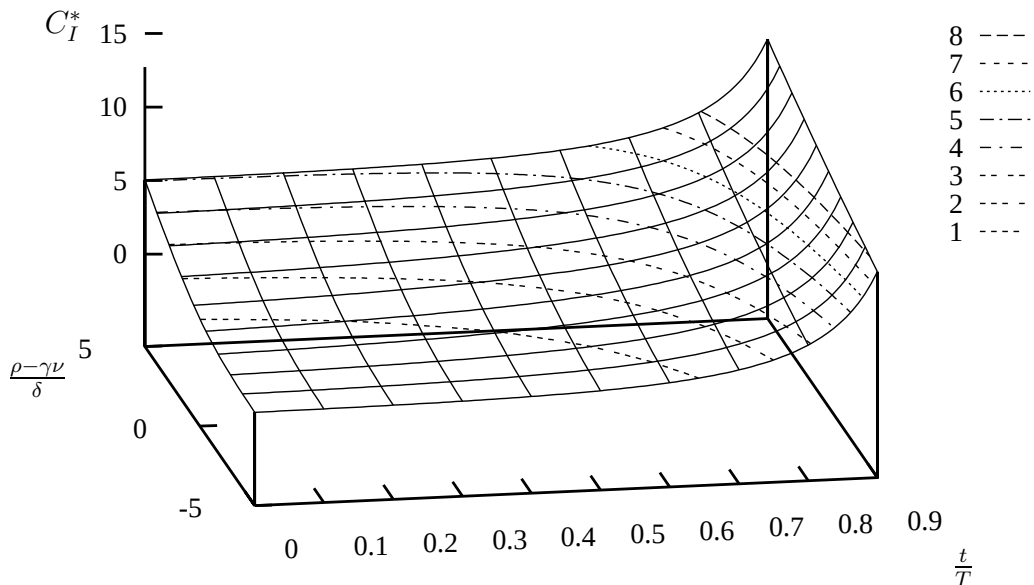


Abbildung 3.5: Verhalten des Terms $C_0^* \cdot C_I^*$ in C^* über der Zeit für verschiedene $(\rho - \gamma\nu)/\delta$

- C_{II}^* : Diese Summe enthält zum einen das Gesamtvermögen $W(t)$ und ist daher für die Linearität des Konsums in $W(t)$ verantwortlich. Zusätzlich zum tatsächlichen Vermögen wird ein zweiter Term addiert. Dieser Term ist nur relevant, wenn $\eta \neq 0$ ist. Er verändert die Berechnungsgrundlage des Konsums in Form von $W(t)$. Dies geschieht für kleine t in stärkerem Maße als für große t . Je nach Vorzeichen von $\delta\eta/\beta$ wird der Konsum zu frühen Zeitpunkten verändert.

- C_{III}^* : Dieser Term enthält nur Parameter, die durch die Nutzenfunktion des Anlegers bestimmt sind und besitzt generellen zeitunabhängigen Einfluß auf den Konsum.

Nun zu (3.59):

$$w^*(t)W(t) = \underbrace{\frac{\alpha - r}{\delta\sigma^2}}_{w_0^*} W(t) + \underbrace{\frac{\eta(\alpha - r)}{\beta r\sigma^2} (1 - e^{r(t-T)})}_{w_I^*}$$

- w_0^* : Dieser Term bewertet die Vorteile der unsicheren gegenüber der sicheren Anlage je nach Wahl von δ und beeinflußt entsprechend die Aufteilung des Vermögens.
- w_I^* : In Abhängigkeit der Bewertung der beiden Anlageformen zueinander und in Abhängigkeit der Parameter der Nutzenfunktion η und β erfolgt eine zeitabhängige Beeinflussung der Portfeuillewahl, deren Größe mit fallendem Gesamtvermögen zunimmt. Diese Beeinflussung verliert analog zu C_{II}^* gegen Ende des Betrachtungszeitraumes ihre Bedeutung.

3.4.1 Zeitlicher Verlauf der Konsum- und Portefeuilleallokation

(3.58) und (3.59) beschreiben den optimalen Konsum bzw. das optimale Portefeuille zu einem bestimmten Zeitpunkt t . Sie sagen jedoch nichts über eine zeitliche Entwicklung des Wohlstands, des Konsums oder der Portefeuillegestaltung aus. Dazu ist zusätzlich (3.3) und (3.5) für $h \rightarrow 0$ zu betrachten. Die analytische Lösung dieses Systems bereitet Schwierigkeiten. Aus diesem Grunde wird eine numerische Simulation auf dem Rechner vorgenommen. Zur Modellierung des Kursverlaufs der unsicheren Anlage diene ein beispielhafter Musterprozeß für eine geometrische Brown'sche Bewegung. Für eine numerische Simulation auf dem Rechner sollen „realistische“ Parameter des Kapitalmarktes angenommen werden.

Wird σ in (3.29) zu Null angenommen, so lautet die Lösung dieser Differentialgleichung:

$$P(t) = A_0 e^{\alpha t}. \quad (3.60)$$

Mit der Annahme eines erwarteten effektiven Jahreszinses von r_{eff} und der Betrachtung des Zeitraumes von 0 bis T mit n Jahren ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{P(T)}{P(0)} &= \frac{A_0 e^{\alpha T}}{A_0 e^{\alpha 0}} = e^{\alpha T} \stackrel{!}{=} r_{\text{eff}}^n \\ \alpha &= \frac{n}{T} \ln r_{\text{eff}} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Bei der Simulation wird von $r_{\text{eff}} = 4\%$ für die unsichere P und $r_{\text{eff}} = 2.5\%$ für die sichere Anlage R ausgegangen. Mit diesen Parametern und einer Streuung von $\sigma = 1.8$ für den Musterprozeß der geometrischen Brown'schen Bewegung ergeben sich die in Abbildung 3.6

dargestellten Verläufe. Die Betrachtung erfolgt über einen Zeitraum von 50 Jahren. Die Simulation auf dem Rechner wurde in 10000 Schritten durchgeführt, so daß der Parameter h bei dieser Berechnung in der Größenordnung von 2 Tagen lag. Eine weitere Verkleinerung von h bringt kein signifikant anderes Ergebnis.

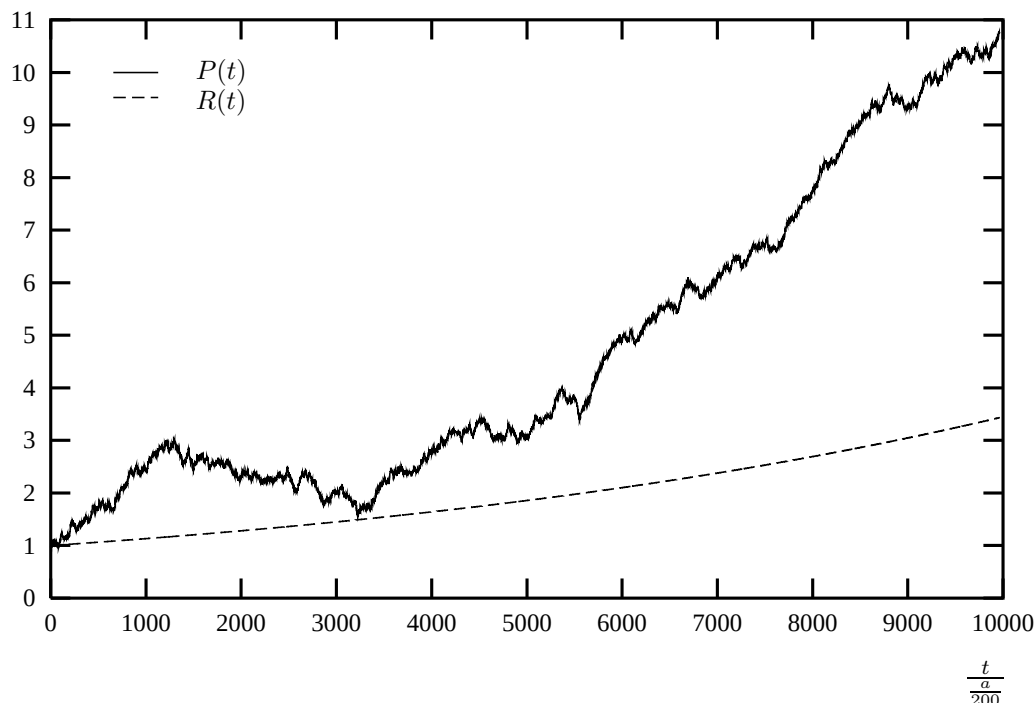


Abbildung 3.6: Beispielhafte Kursverläufe über einen Zeitraum von 50 Jahren

Die Betrachtung erfolgt für zwei verschiedene Nutzenfunktionen. Abbildung 3.7 zeigt diese Nutzenfunktionen. Es handelt sich um eine quadratische (I) und eine Wurzel-Nutzenfunktion (II). Bei der quadratischen Nutzenfunktion muß zudem sichergestellt sein, daß der Konsum $C(t) < 4$ gehorcht. Abbildung 3.7 zeigt neben den Nutzenfunktionen auch den Verlauf der absoluten und relativen Risikoaversionen.

Abbildung 3.8 zeigt die Simulationsergebnisse ⁶ für $W(t)$, $C^*(t)$ und $w^*(t)$ für die zwei Nutzenfunktionen und verschiedene ρ . Sie basieren auf dem in Abbildung 3.6 dargestellten Kursverläufen. Der unterschiedliche Maßstab der Diagramme in Abbildung 3.8 ist zu beachten. Er wurde gewählt, um die Kurvenverläufe gut erkennen zu können. An dieser Stelle sei noch einmal betont, daß diese spezielle Ausprägung der Verläufe rein zufällig ist. Die Beeinflussung des Kurses durch den stochastischen Prozeß wurde in die Simulation miteingeschlossen, da auf diese Weise die Zusammenhänge zwischen den berechneten Größen optisch gut sichtbar werden. Der Startwert für das Vermögen betrug $W(0) = 1$. Dies bedeutet, daß ohne Anlage auf dem Kapitalmarkt ein Konsum von 1 in jedem Zeitintervall getätigt werden kann.

⁶Das Programm, mit dem diese Simulation durchgeführt wurde, ist in Anhang B.1 abgedruckt.

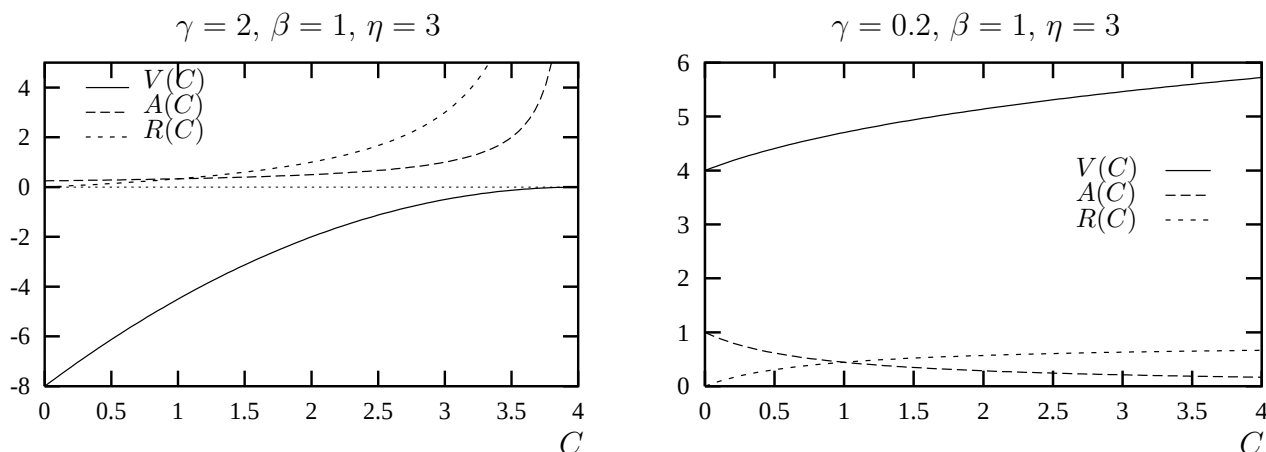


Abbildung 3.7: Betrachtete Nutzenfunktionen

Beim Vergleich der Ergebnisse für die verschiedenen Nutzenfunktionen ist zunächst der höhere Anteil an der unsicheren Anlage bei Nutzenfunktion II auffällig. Dies ist durch die geringere Risikoscheu der Nutzenfunktion II bedingt. Durch den größeren Anteil der unsicheren Anlage ist bei den Graphen in der rechten Spalte von Abbildung 3.8 die Auswirkung von Kursschwankungen der unsicheren Anlage auf das Vermögen und den Konsum stark ausgeprägt.

Die Auswirkung des Parameters ρ als Gegenwartspräferenz ist anschaulich zu sehen. Für große ρ wird der Konsum zu früheren Zeitpunkten und für kleine ρ zu späteren Zeitpunkten hin verschoben. Entsprechend wird der Vermögensbestand für große ρ schnell aufgebraucht. Neben dem höheren Endkonsum bei kleinem ρ ist auch der insgesamt getätigte Konsum für kleine ρ größer, da das Vermögen länger dem Kapitalmarkt zur Verfügung steht und somit höhere Erträge bringt. In gleicher Weise gilt, daß der erwartete Konsum für risikofreudigere Anleger höher ist als für risikoscheuere. Tabelle 3.1 zeigt den gesamten Konsum, den der Anleger während seines Planungszeitraumes tätigen konnte.

ρ	Nutzenfunktion I	Nutzenfunktion II
2	1.89	2.33
1	1.98	3.08
0.5	2.02	3.53

Tabelle 3.1: Gesamtkonsum bei verschiedenen Nutzenfunktionen und Gegenwartspräferenzen

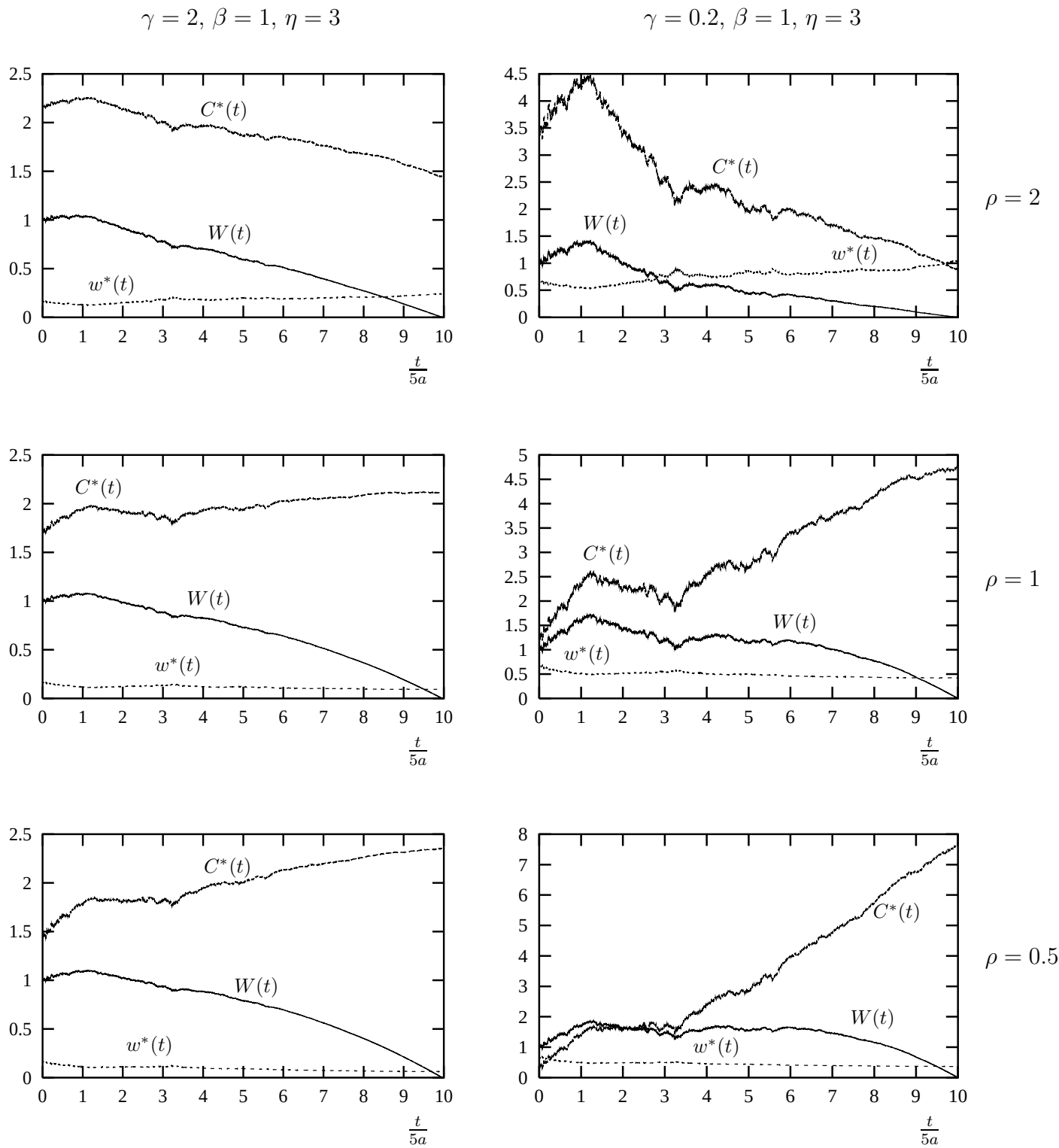


Abbildung 3.8: Gesamtvermögen, Konsum und Portefeuillewahl über die Zeit

3.4.2 Berücksichtigung von Einkommen aus Anstellungsverhältnissen

Die bisherige Betrachtung berücksichtigte nur Einkommen, das durch Kapital erzielt wird. Für die Praxis wird in den meisten Fällen jedoch auch ein Einkommen $dy = Y(t) dt$ relevant sein, das durch ein Anstellungsverhältnis bezogen wird. $Y(t)$ stellt daher ein Einkommen pro Zeiteinheit dar.

Die folgenden Gleichungen geben die Lösungen für $C^*(t)$ und $w^*(t)$ für den Fall an, daß die Nutzenfunktion der HARA-Klasse entstammt und das Einkommen konstant ($Y(t) \equiv Y$) ist.

$$C^*(t) = \frac{(\rho - \gamma\nu) \left(W(t) + Y \frac{1 - e^{r(t-T)}}{r} + \frac{\delta\eta}{\beta r} (1 - e^{r(t-T)}) \right)}{\delta \left(1 - e^{\frac{(\rho - \gamma\nu)(t-T)}{\delta}} \right)} - \frac{\delta\eta}{\beta} \quad (3.62)$$

und

$$w^*(t)W(t) = \frac{\alpha - r}{\delta\sigma^2} \left(W(t) + Y \frac{(1 - e^{r(t-T)})}{r} \right) + \frac{\eta(\alpha - r)}{\beta r\sigma^2} (1 - e^{r(t-T)}) . \quad (3.63)$$

Diskussion:

Im Vergleich von (3.62) und (3.63) mit (3.58) und (3.59) läßt sich feststellen, daß (3.62) und (3.63) durch eine Substitution von

$$W(t) \mapsto W(t) + Y \frac{1 - e^{r(t-T)}}{r}$$

in (3.58) und (3.59) gewinnen lassen. Dies bedeutet, daß ein zusätzliches Einkommen wie eine Vergrößerung des Gesamtvermögens wirkt. Allerdings ist diese Erhöhung zeitabhängig und ist für kleine t stärker wirksam.

Die Annahme eines zeitunabhängigen Einkommens in diesem Abschnitt ist jedoch eine für die Praxis unzumutbare Einschränkung. Bei zeitabhängigen Einkommen ist entweder auf eine numerische Rechnung auszuweichen, oder man geht zu einer anderen stochastischen Prozeßklasse über, die dann auch in der Lage ist, zufällige Gehaltsänderungen zu berücksichtigen. Dies wird durch die Betrachtung von Poisson-Prozessen im Abschnitt 3.5.2 geleistet.

3.5 Diskontinuierliche Zustandsänderungen — Poisson-Prozesse

Die bisherigen Untersuchungen fanden auf der Basis der geometrischen Brown'schen Bewegung statt und waren zeit- und wertkontinuierlich. Diese Beschreibung ist für eine große Klasse von Wertpapieren am Kapitalmarkt wie z. B. Aktien angemessen, für andere Klassen wie z. B. Obligationen ist jedoch eine diskrete Beschreibung zutreffender.

Legt man als Modellprozeß einen Poisson-Prozeß⁷ zugrunde, so beschreibt die Poisson-Verteilung die Wahrscheinlichkeit, innerhalb eines bestimmten Zeitintervalls t genau n Ereignisse anzutreffen. Es sei $q(t)$ ein Poisson-Prozeß. Die Poisson-Verteilung hat dann folgende Gestalt:

$$P\{q(t) = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}. \quad (3.64)$$

$\lambda > 0$ ist ein Parameter, der durch die Verteilungsdichte der Zeiten zwischen zwei Ereignissen bestimmt wird. Diese Verteilungsdichte hat bei einem Poisson-Prozeß die Gestalt einer Exponentialverteilung:

$$p(t) = \lambda e^{-\lambda t}. \quad (3.65)$$

Die Ereignisse können beispielsweise die Änderung eines Kurses um einen bestimmten Wert betreffen. Der Kurs wäre in diesem Beispiel eine Zustandsvariable, die zu bestimmten Zeiten durch den Poisson-Prozeß verändert wird. Die folgenden zwei Abschnitte zeigen mögliche Anwendungen und Ausprägungen der Zustandsvariablen.

Eine wichtige Eigenschaft des Poisson-Prozesses ist seine „Gedächtnislosigkeit“. Dies bedeutet, daß das Eintreffen des nächsten Ereignisses unabhängig vom vorigen Ereignis ist. Es existiert eine Theorie der stochastischen Differentialgleichungen für Poisson-Prozesse die derjenigen für Brown'sche Bewegungen sehr ähnlich sind.

Im folgenden sei $x(t)$ eine Zustandsvariable. Das Ereignis sei, daß diese Zustandsvariable um $g(x, t) \cdot \mathcal{S}$ verändert wird. $\mathcal{S}$ kann dabei im allgemeinen Fall selbst wieder eine Zufallsvariable sein. Wird ein nicht-stochastisches Wachstum berücksichtigt, so läßt sich der Poisson-Prozeß durch folgende stochastische Differentialgleichung beschreiben:

$$dx = f(x, t) dt + g(x, t) dq \quad (3.66)$$

Diese Gleichung ist Analog zu (3.1) mit dem Unterschied, daß der stochastische Prozeß einer anderen Klasse angehört.

3.5.1 Anwendung auf die Preisbildung

In diesem Abschnitt wird der Preis einer Obligation von einer die Zustandsvariable bestimmt, die durch einen Poisson-Prozeß verändert wird. Die Obligation ersetzt dabei die sichere Anlage der vorherigen Beispiele. Die Obligation führt nur in bestimmten Fällen zu einem Ertrag r . Mit (3.66) läßt sich der Prozeß, der den Preis der Obligation generiert, mit $g = -P$ wie folgt schreiben:

$$dP = rP dt - P dq. \quad (3.67)$$

⁷vgl. Feller, William: „An Introduction to Probability Theory and Its Applications“, S. 8 ff. u. S. 11 ff.

Dabei gelte $P(\mathcal{S} \equiv 1) = 1$. Der Höhe der Preisänderung sei daher immer gleich. Der Fall, in dem es zu keinem Ertrag kommt, sei der Default-Fall und werde damit identifiziert, daß kein Ereignis stattgefunden hat. Auf diese Weise erklärt sich das --Zeichen in (3.67). Durch Einsetzen in (3.11) ergibt sich aus der Budgetgleichung

$$dW = [wW(\alpha - r) + rW - C] dt + w\sigma W dz - (1 - w)W dq. \quad (3.68)$$

C^* und w^* sind dann durch

$$0 = U_C(C^*, t) - J_w(W, t) \quad (3.69)$$

und

$$0 = \lambda J_W(w^*W, t) + J_W(W, t)(\alpha - r) + J_{WW}(W, t)\sigma^2 w^*W \quad (3.70)$$

implizit bestimmt. Für eine spezielle Nutzenfunktion $U(C, t) = C^\gamma/\gamma$, $\gamma < 1$, daher wenn $\rho = \beta = \eta = 0$ in (3.51) und (3.52) gesetzt wird, ergibt sich als Lösung

$$C^*(t) = \frac{AW(t)}{(1 - \gamma)(1 - e^{\frac{A(t-T)}{1-\gamma}})} \quad (3.71)$$

mit

$$A = -\gamma \left[\frac{(\alpha - r)^2}{2\sigma^2(1 - \gamma)} + r \right] + \lambda \left[1 - \frac{2\gamma}{2}(w^*)^\gamma - \frac{\gamma(\alpha - r)}{2\sigma^2(1 - \gamma)}(w^*)^{\gamma-1} \right] \quad (3.72)$$

und

$$w^* = \frac{\alpha - r}{\sigma^2(1 - \gamma)} + \frac{\lambda}{\sigma^2(1 - \gamma)}(w^*)^{\gamma-1}. \quad (3.73)$$

Auffällig an (3.73) ist die Zeitunabhängigkeit. Dies ist durch die Gedächtnislosigkeit des Poisson-Prozesses und den zeitunabhängigen Ansatz der Prozeßparameter für beide Prozesse begründet. Weiterhin ist die Aufteilung Anlageportefeuille-Obligation nicht vom Vermögen abhängig. Intuitiv einleuchtend dagegen ist die stärkere Investition in das Anlagenportefeuille für wachsende λ , da die Wahrscheinlichkeit durch die Obligation keinen Ertrag zu erzielen mit wachsendem λ steigt.

3.5.2 Stochastische Einkommenserhöhungen

Nun wird wieder zum ursprünglichen Fall des Anlageportefeuilles und der sicheren Anlage zurückgekehrt jedoch unter Berücksichtigung eines Einkommens aus einem Anstellungsverhältnis, das sich zu zufälligen Zeitpunkten um einen bestimmten Betrag erhöht. Diese Erhöhung sei wieder durch einen Poisson-Prozeß generiert, so daß sich der Zustand des Einkommens mit Hilfe folgender Gleichung beschreiben läßt:

$$dY = \epsilon dq \quad (3.74)$$

und $P(\mathcal{S} \equiv 1) = 1$. Die Nutzenfunktion habe folgende Gestalt:

$$U(C, t) = -\frac{1}{\eta} e^{-\rho t} e^{-\eta C}. \quad (3.75)$$

Diese Nutzenfunktion entspringt nicht der HARA-Klasse und wurde gewählt, um einen einfachen geschlossenen Ausdruck für die Konsum- und Portefeuilleallokation angeben zu können. Zur weiteren Vereinfachung der Rechnung werde ferner ein unbegrenzter Zeithorizont $T = \infty$ betrachtet. Damit ergibt sich folgende Lösung:

$$C^*(t) = r \underbrace{\left[W(t) + \frac{Y(t)}{r} + \underbrace{\frac{\lambda}{r^2} \frac{1 - e^{-\eta \epsilon}}{\eta}}_B \right]}_A + \frac{1}{\eta r} \left[\rho - r + \frac{(\alpha - r)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (3.76)$$

und

$$w^*(t)W(t) = \frac{\alpha - r}{\eta \sigma^2 r}. \quad (3.77)$$

Der Term A in (3.76) beschreibt eine Art „effektives Vermögen“, das zur Konsumbestimmung wirksam ist. Dieses „effektive Vermögen“ enthält das tatsächliche Vermögen zuzüglich eines Terms, der die abgezinsten zukünftigen Verdienste repräsentiert. Diese Abzinsung ist wegen $T = \infty$ unabhängig von t . Für $\lambda > 0$ beschreibt der Term B in (3.76) den abgezinsten Wert der zukünftig erwarteten Einkommenserhöhungen, die mit einem etwas geringeren als dem Marktzinssatz für risikofreie Anlagen verzinst werden, da die Einkommenserhöhungen unsicher sind. Dieser Abzinsungsfaktor ist je nach individueller Risikoscheu unterschiedlich.

4 Das intertemporale zeitkontinuierliche CAPM auf Basis des Kapitalmarktgleichgewichts

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Ableitung einer zeitkontinuierlichen Form des Capital Asset Pricing Model (CAPM). Die beiden vorangegangenen Kapitel beschäftigten sich mit der Bestimmung von optimalen Entscheidungsregeln für den einzelnen Anleger mit und ohne Berücksichtigung von stochastischen Preisänderungsmodellen. Sie legen damit die Grundlage für dieses Kapitel, das erwartete Renditen auf dem Kapitalmarkt basierend auf dem Nachfrageverhalten der Anleger und der Markträumungsbedingung im Gleichgewicht ableitet.

Nach der Besprechung von grundsätzlichen Eigenschaften einer Anlage, werden die Modellannahmen des vollkommenen Marktes aufgeführt. Getrennt davon werden die speziellen den zeitkontinuierlichen Handel betreffenden Annahmen aufgezählt. Der nächste Abschnitt widmet sich in einiger Ausführlichkeit der Modellelierung von Vorgängen auf dem Kapitalmarkt durch stochastische Prozesse. Dieser Abschnitt ist für das Verständnis der weitergehenden Analyse von großer Bedeutung. Für die Ableitung von erwarteten Anlagerenditen ist die Betrachtung aller am Kapitalmarkt tätigen Investoren notwendig. Entsprechend erfolgt im Anschluß an die Prozeßbeschreibung die Formulierung der Präferenzstruktur, der Budget-Gleichung und der Anlagenachfragefunktion für mehrere Investoren. Darauf folgt die Betrachtung des Modells für drei verschiedene Komplexitätsstufen. Sie gliedert sich wie folgt:

1. Keine expliziten Zustandsvariablen
2. Der Zins als einzige Zustandsvariable
3. Betrachtung des allgemeinen Modells mit m Zustandsvariablen
 - Ableitung der Wertpapiermarkthyperebene
 - Beschreibung des Consumption-Based CAPM (CCAPM) von Breeden

Das Kapitel schließt mit einer Gegenüberstellung des klassischen CAPM, des zustandsorientierten zeitkontinuierlichen CAPM und des CCAPM in Tabellenform.

4.1 Grundsätzliches zu den Eigenschaften einer Anlage

Dieser Abschnitt beschreibt die Funktionen und Eigenschaften eines Wertpapiers auf der Basis der Mikroökonomie. Zunächst einige Variablenvereinbarungen:

t	Zeit
h	Dauer einer Anlageperiode
$K(t)$	Kapital, gemessen in physikalischen Einheiten (z. B. Maschinen)
$P_K(t)$	Preis pro Einheit Kapital, gemessen in Konsumeinheiten
$V(t)$	Wert der Anlage, gemessen in Konsumeinheiten
X	Cash Flow
N	Anzahl ausgegebener Unternehmensanteile
λ	Abschreibungsrate pro Zeiteinheit h

Der Wert der Anlage zum Zeitpunkt t ist damit

$$V(t) = P_K(t)K(t). \quad (4.1)$$

Der Wert der Anlage zum Zeitpunkt t beträgt nach einer Periode der Länge h

$$E_h(t) = X + (1 - \lambda)P_K(t+h)K(t) - V(t). \quad (4.2)$$

Der zusätzliche Kapitalbedarf für die nächste Periode $V(t+h) - V(t)$ ist der Preis der Investition in Konsumeinheiten $P_K(t+h)[K(t+h) - (1 - \lambda)K(t)]$ abzüglich des erwirtschafteten Cash Flows:

$$V(t+h) - V(t) = P_K(t+h)[K(t+h) - (1 - \lambda)K(t)] - X \quad (4.3)$$

Zur Finanzierung gebe das Unternehmen $N(t)$ Anteile zu einem Preis von jeweils $P(t)$ aus. Dann bestimmt sich der Preis eines Anteils durch den Wert des Unternehmens zu diesem Zeitpunkt geteilt durch die Anzahl der Anteile, die ausgegeben werden:

$$P(t+h) := \frac{X + (1 - \lambda)P_K(t+h)K(t)}{N(t)}. \quad (4.4)$$

Durch (4.4) ist der zusätzliche Kapitalbedarf für die nächste Periode noch nicht abgedeckt. Dies geschehe daher durch eine entsprechende Wahl von $N(t+h)$:

$$N(t+h) := N(t) + \frac{P_K(t+h)[K(t+h) - (1 - \lambda)K(t)] - X}{P(t+h)}. \quad (4.5)$$

Unter der Annahme, daß alle Dividendenzahlungen den Anteilseignern in Form von Wertzuschlägen auf ihre Anlagen ausgezahlt werden, stellt $[P(t+h) - P(t)]/P(t)$ die Rendite der Anlage dar.

4.2 Modellannahmen und Abbildung der Realität

4.2.1 Vollkommenheit des Marktes

1. Die Haftung ist bei allen Anlagen beschränkt.

2. Es gibt keine Transaktionskosten und Steuern. Die Anlageanteile sind beliebig teilbar.
3. Die Zahl der am Kapitalmarkt aktiven Investoren mit vergleichbarem Vermögen ist so groß, daß jeder Investor der Meinung ist, so viele Anlagen zum Marktpreis kaufen und verkaufen zu können, wie er will.
4. Der Kapitalmarkt ist im Gleichgewicht.
5. Soll- und Habenzins sind gleich.
6. Leerverkäufe sind zugelassen.

4.2.2 Zeitkontinuierlicher Handel und Stochastische Prozesse

7. Der Handel findet zeitkontinuierlich statt.
8. Der die Kapitalmarktparameter beschreibende Zustandsvektor wird durch einen zeithomogenen Markov-Prozeß generiert.
9. Es sind nur lokale Änderungen der Zustandsvariablen erlaubt.
10. Für jede Anlage ist die erwartete Rendite zum Zeitpunkt t pro Zeiteinheit h durch

$$\alpha := \frac{1}{h} E_t \left\{ \frac{P(t+h) - P(t)}{P(t)} \right\} \quad (4.6)$$

und die erwartete Varianz der erwarteten Rendite pro Zeiteinheit durch

$$\sigma^2 := \frac{1}{h} E_t \left\{ \left(\frac{P(t+h) - P(t)}{P(t)} \right)^2 \right\} \quad (4.7)$$

gegeben.

4.2.3 Modellierung des die Preise generierenden Prozesses

Es existieren verschiedene Möglichkeiten die Preisentwicklung zu modellieren. Dabei ist ein Kompromiß zwischen der Realitätsnähe und der Einfachheit der mathematischen Analyse zu finden. Im allgemeinen Fall beschreibe

$$\frac{dP_i}{P_i} = \alpha_i(\vec{P}, t) dt + \sigma_i(\vec{P}, t) dz_i \quad (4.8)$$

analog zu (3.1) die Entwicklung der Preise. Das heißt α_i und σ_i sind Funktionen des Preisgefüges und der Zeit. Für die mathematische Analyse ist es vorteilhaft von der Markov-Eigenschaft¹ auszugehen. Dies ist insbesondere für die Anwendung des Bellman-Prinzips

¹vgl. Feller, William: „An Introduction to Probability Theory and Its Applications“, S. 94 ff.

und den darauf aufbauenden Dynkin-Operator notwendig. Die Markov-Eigenschaft bedeutet, daß die Entwicklung in der Zukunft nur von dem Zustand der Gegenwart und nicht von den vorigen Zuständen in der Vergangenheit abhängt. Zur Beschreibung eines solchen Zustandes dient ein Zustandsvektor $\vec{\xi}$, dessen Komponenten alle nötigen Informationen über den Systemzustand enthalten. Die Markov-Eigenschaft läßt sich damit kurz wie folgt formulieren:

$$\vec{\xi}(t+h) = \vec{f}(\vec{\xi}(t)). \quad (4.9)$$

Wird beispielsweise die explizite Zeitunabhängigkeit von α_i und σ_i in (4.8) angenommen, es gelte daher

$$\frac{dP_i}{P_i} = \alpha_i(\vec{P}) dt + \sigma_i(\vec{P}) dz_i, \quad (4.10)$$

so läßt sich dieses System durch Setzen von $\vec{\xi} := \vec{P}$ in (4.9) als ein Markov-System beschreiben, da der Prozeß dz_i gedächtnislos ist und damit nicht auf vorige Werte bedingt ist.

Problematisch ist jedoch, daß das Preisgefüge $\vec{P}$ zusätzlich in jedem Zeitpunkt einem Gleichgewicht bei Markträumung gerecht werden muß. Es bestehen daher Beziehungen zwischen $V_i(t) = N_i(t)P_i(t)$ auf der einen sowie α_i und σ_{ij} auf der anderen Seite. Auf diese Weise könnten die $N_i(t)$, die wiederum keine Markov-Eigenschaft besitzen müssen, die Markov-Eigenschaft des Preisbildungsprozesses aufheben.

In der weiteren Rechnung soll die Abhängigkeit der α_i und σ_i vom Preisgefüge $\vec{P}$ aufgegeben werden. Statt dessen werde die Zeitabhängigkeit wieder eingeführt. Es gelte daher

$$\frac{dP_i}{P_i} = \alpha_i(t) dt + \sigma_i(t) dz_i. \quad (4.11)$$

Dabei seien die α_i und σ_i selbst durch stochastische Prozesse der Form

$$d\alpha_i = a_i dt + b_i d\tilde{q}_i \quad (4.12)$$

und

$$d\sigma_i = u_i dt + v_i dx_i \quad (4.13)$$

generiert.

Um einzusehen, daß das Gesamtsystem (4.11), (4.12) und (4.13) die Markov-Eigenschaft besitzt, wird nun die Übergangsgleichung der Zustandsvektoren aufgestellt. Dazu müssen α_i und σ_i mit in den Zustandsvektor aufgenommen werden:

$$\vec{\xi}_P := (P_1, \dots, P_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \sigma_1, \dots, \sigma_n)^T \quad (4.14)$$

Der Index P dient zur Kennzeichnung, daß dieser Zustandsvektor nur solche Variablen enthält, die zur Generierung der Preise notwendig sind.

Durch Einsetzen von (4.14) und Berücksichtigung von (4.11), (4.12) und (4.13) erhält man für $h \rightarrow 0$

$$\begin{pmatrix} P_1(t+dt) \\ \vdots \\ P_n(t+dt) \\ \alpha_1(t+dt) \\ \vdots \\ \alpha_n(t+dt) \\ \sigma_1(t+dt) \\ \vdots \\ \sigma_n(t+dt) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \\ \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_n(t) \\ \sigma_1(t) \\ \vdots \\ \sigma_n(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} P_1(t)\alpha_1(t) dt + P_1(t)\sigma_1(t) dz_1 \\ \vdots \\ P_n(t)\alpha_n(t) dt + P_n(t)\sigma_n(t) dz_n \\ a_1 dt + b_1 d\tilde{q}_1 \\ \vdots \\ a_n dt + b_n d\tilde{q}_n \\ u_1 dt + v_1 dx_1 \\ \vdots \\ u_n dt + v_n dx_n \end{pmatrix}}_{d\vec{\xi}} \quad (4.15)$$

oder kurz

$$\vec{\xi}_P(t+dt) = \vec{\xi}_P(t) + d\vec{\xi}_P(t) \quad (4.16)$$

mit

$$d\vec{\xi}_P(t) = \vec{f}_P(\vec{\xi}_P(t), d\vec{z}, d\vec{q}, d\vec{x}). \quad (4.17)$$

$d\vec{\xi}_P(t)$ läßt sich in einen zeitabhängigen und einen prozeßabhängigen Teil aufspalten.

$$d\vec{\xi}_P = \vec{f}_P(\vec{\xi}_P) dt + G_P(\vec{\xi}_P) d\vec{Q}_P \quad (4.18)$$

Mit

$$(\vec{f}_P(\vec{\xi}_P))_i = f_{Pi}(\vec{\xi}_P) = (P_1(t)\alpha_1(t), \dots, P_n(t)\alpha_n(t), a_1, \dots, a_n, u_1, \dots, u_n) \quad (4.19)$$

und

$$G_P(\vec{\xi}) = \begin{pmatrix} P_1(t)\sigma_1(t) & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & P_n(t)\sigma_n(t) & & & & & & & 0 \\ & & & b_1 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & b_n & & & & \\ & & & & & & v_1 & & & \\ & & & & & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & & & & v_n & \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

das durch

$$(G_P)_{ii} = g_{Pi} \quad (4.21)$$

vollständig beschrieben wird.

Da $d\vec{z}$, $d\vec{q}$ und $d\vec{x}$ durch gedächtnislose Prozesse generiert werden, hat (4.15) die Markov-Eigenschaft.

Um einer Bedingung der Form

$$\hat{f}(\vec{P}(t), \vec{U}(t)) = 0, \text{ mit } \vec{U}(t+h) = \vec{U}_f(\vec{U}(t)) \quad (4.22)$$

gerecht zu werden, können einzelne Komponenten in (4.15) abgeglichen werden. (4.15) stellt zudem die Basis für eine numerische Simulation des Preisgefüges auf dem Rechner dar. Ferner ist sichergestellt, daß die Preise keine negativen Werte annehmen können, da α und σ endlich sind und dP in (4.11) auf P bezogen ist, ein Preis von Null somit eine absorbierende Schranke darstellt.

Schließlich fehlt noch die obligatorische Sonderbehandlung der sicheren Anlage, die für das restliche Kapitel eingeführt wird. Diese Sonderbehandlung ist notwendig, da die Regularität der Kovarianzmatrix der Anlagepreise gefordert wird. Im folgenden gebe es daher n verschiedene risikobehaftete und eine risikolose Anlage. Dabei kann nur von einem augenblicklichem Risiko gesprochen werden, da sich die σ_i , $i = 1, \dots, n$ laufend ändern können. Die Existenz einer sicheren Anlage sei jedoch garantiert. Für diese sichere Anlage gilt daher $\sigma_{n+1} = 0$ und $\alpha_{n+1}(t) = r(t)$. Die Höhe der Erträge in der Zukunft können und werden dagegen unsicher sein. In (4.13) gilt somit $b_{n+1} \neq 0$. Es ist daher zu unterscheiden zwischen den unsicheren Anlagen, deren Erträge bereits während einer Anlageperiode unsicher sind und der sicheren Anlage, deren Ertrag in dieser Periode bekannt und sicher ist. Der Ertrag, den die sichere Anlage in der nächsten Periode erbringen wird, ist heute jedoch noch unbekannt.

4.2.4 Modellierung der Kapitalmarktzustandsvariablen

Neben der Beschreibung der Preise ist eine Modellierung der Zustandsvariablen des Kapitalmarktes erforderlich. Beispiele für diese Kapitalmarktzustandsvariablen sind der sichere Zinssatz, Staatsanleihen, Wechselkurse und ähnliches.

Die Modellierung soll gemäß folgender Gleichung geschehen:

$$d\vec{S} = \vec{f}(\vec{S}) dt + G(\vec{S}) d\vec{Q}. \quad (4.23)$$

Dabei sei $\vec{f}$ mit den Komponenten f_i eine beliebige vektorwertige Funktion und G eine Diagonalmatrix mit den Elementen g_i . Die $(d\vec{Q})_i = dq_i$ stellen normalverteilte gedächtnislose stationäre Prozesse dar, die die Kovarianzen σ_{Qij} untereinander besitzen. Man beachte die gleiche Struktur von (4.23) und (4.18).

Es gibt daher zwei verschiedene Sätze von Zustandsvariablen $\vec{\xi}_P$ und $\vec{S}$. Sie lassen sich zu einem Vektor

$$\vec{\xi}^T = (\vec{\xi}_P^T, \vec{S}^T) \quad (4.24)$$

zusammenfassen. Wenn in den folgenden Ausführungen dieses Kapitels kurz vom „Zustandsvektor“ gesprochen wird, so ist stets der Vektor $\vec{S}$ gemeint. Dabei ist zu bedenken, daß zur vollständigen Beschreibung des Systems stets der Vektor $\vec{\xi}$ erforderlich ist.

4.2.5 Beziehungen der Prozesse untereinander

In den vorigen Abschnitten wurden die Modelle für die Generierung der Anlagenpreise sowie der Kapitalmarktzustandsvariablen vorgestellt. Für die spätere Untersuchung sind die Beziehungen der stochastischen Prozesse $d\vec{z}$ und $d\vec{Q}$ von besonderem Interesse. Hier ergeben sich notationelle Schwierigkeiten, da zwischen den statistischen Parametern der generierenden Prozesse und den durch die stochastischen Prozesse erzeugten stochastischen Größen unterschieden werden muß.

Der Korrelationskoeffizient zwischen den Prozessen q_i und z_j läßt sich durch

$$\eta_{ij} = \frac{\sigma_{q_i z_j}}{\sigma_{q_i} \sigma_{z_j}}. \quad (4.25)$$

mit $\sigma_{q_i z_j}$ der Kovarianz zwischen den Prozessen q_i und z_j sowie σ_{q_i} und σ_{z_j} den Standardabweichungen der Prozesse q_i und z_j beschreiben. Diese Korrelationen sind von besonderer Bedeutung, da sie den Ausgangspunkt zur Absicherung gegen Änderungen der Kapitalmarktzustandsvariablen mit Hilfe der Anlagen darstellt.

4.3 Formulierung der Präferenzstruktur und der Budget-Gleichung für mehrere Anleger

Für das weitere Vorgehen ist es notwendig die Konsumpräferenz jedes Anlegers zu betrachten. Dazu wird (2.15) aus Abschnitt 2.2 auf K Konsumenten/Investoren verallgemeinert:

$$\max_{t=0}^E \left\{ \int_0^{T^k} U^k[c^k(s), s] ds + B^k[W^k(T^k), T^k] \right\}. \quad (4.26)$$

(4.26) beschreibt das Optimierungsproblem des k -ten Konsumenten/Investors. Wo es zum Verständnis nicht erforderlich ist, werde der Index k zur Vereinfachung der Notation in Zukunft weggelassen.

Mit dieser Vereinbarung läßt sich die Wohlstandsänderung mit $w_i := N_i P_i / W$ wie folgt schreiben:

$$dW = \sum_{i=1}^{n+1} w_i W \frac{dP_i}{P_i} + (y - c) dt \quad (4.27)$$

c ist der Konsum und y das Einkommen aus Anstellungsverhältnissen pro Zeiteinheit. Durch Substitution von dP_i/P_i aus (4.11) wird (4.27) zu

$$dW = \left[\sum_{i=1}^n w_i (\alpha_i - r) + r \right] W dt + \sum_{i=1}^n w_i W \sigma_i dz_i + (y - c) dt. \quad (4.28)$$

Dabei ist Wahl von $w_1, \dots, w_n$ an keine Nebenbedingung gebunden, da w_{n+1} zur Gewährleistung von $\sum_{i=1}^{n+1}$ analog zu Abschnitt 3.2.3 herangezogen werden kann. Mit dem Gesamtvermögen $W = \sum_{i=1}^{n+1} N_i P_i$ und Einsetzen von w_i in (4.27) läßt sich

$$(y - c) dt = \sum_{i=1}^{n+1} dN_i (P_i + dP_i) \quad (4.29)$$

gewinnen. Die rechte Seite von (4.29) beschreibt den Zukauf von neuen Wertpapieren. Die linke Seite entspricht dem Ersparnis vom Einkommen durch Konsumverzicht. Für negative Vorzeichen von dN_i bzw. $(y - c)$ findet entsprechend der umgekehrte Vorgang statt.

4.4 Die Anlagenachfragefunktion

(4.18) zusammen mit (4.19) und (4.20) sowie (4.21) führen analog zu Abschnitt 3.2 zur Optimalitätsgleichung. Zunächst sei (3.16) unter Auswertung des Dynkin-Operators (3.15) wiederholt:

$$\begin{aligned} \phi(c, \vec{w}; W, \vec{\xi}, t) &:= U(c, t) + J_t + J_W \left(\sum_{i=1}^n w_i \alpha_i W - c \right) \\ &+ \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i J_i + \frac{1}{2} J_{WW} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} w_i w_j W^2 \\ &+ W \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n J_{iW} P_i w_j \sigma_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n J_{ij} P_i P_j \sigma_{ij} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Durch folgende Substitutionen

$$\sum_{i=1}^n w_i \alpha_i W \rightarrow \sum_{i=1}^n w_i (\alpha_i - r) + r \quad (4.31)$$

$$P_i \alpha_i \rightarrow f_i \quad (4.32)$$

$$P_i \sigma_{ij} \rightarrow g_i \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i} = g_i \sigma_j \rho_{ij} \quad (4.33)$$

$$P_i P_j \sigma_{ij} \rightarrow g_i g_j \sigma_{ij} \quad (4.34)$$

läßt sich bei Anpassung der Summenlaufindexgrenzen die folgende Optimalitätsgleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \max_{\{c, w\}} \left(U(c, t) + J_t + J_W \left(\left[\sum_{i=1}^n w_i (\alpha_i - r) + r \right] W - c \right) \right. \\ &+ \sum_{i=1}^m J_i f_i + \frac{1}{2} J_{WW} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i W_j \sigma_{ij} W^2 \\ &\left. + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n J_{iW} w_j W g_i \sigma_j \eta_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m J_{ij} g_i g_j \sigma_{Qij} \right) \end{aligned} \quad (4.35)$$

gewinnen.

Wie in Abschnitt 3.2 erfolgt die Differentiation von (4.35) bezüglich c und w_i , um notwendige für ein Extremum Bedingungen zu erhalten.

$$0 = U_c(c, t) - J_W(W, t, \vec{\xi}) \quad (4.36)$$

für c und

$$0 = J_W(\alpha_i - r) + J_{WW} \sum_{j=1}^n w_j W \sigma_{ij} + \sum_{j=1}^m J_{jW} g_j \sigma_i \rho_{ji}, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.37)$$

für $\vec{w}$. (4.36) und (4.37) beschreiben die optimalen Lösungen in Abhängigkeit der Zustandsvariablen $\vec{\xi}$, W und t . W und t gehören ebenfalls zu den Zustandsvariablen. Sie sind jedoch nicht in den Zustandsvektor $\vec{\xi}$ aufgenommen worden, da sie keine statistischen Verknüpfungen von Interesse zu den übrigen Parametern besitzen.

(4.37) läßt sich durch Matrixinversion von Σ nach $\vec{w}$ auflösen:

$$w_i W = - \underbrace{\frac{J_W}{J_{WW}}}_{A} \sum_{j=1}^n \nu_{ij} (\alpha_j - r) + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \underbrace{-\frac{J_{kW}}{J_{WW}}}_{H_k} \sigma_j g_k \rho_{kj} \nu_{ij}, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.38)$$

mit $(\Sigma^{-1})_{ij} = \nu_{ij}$.

Für die folgende Diskussion ist es hilfreich, die Faktoren A und H_k durch implizites Differenzieren von (4.36) wie folgt auszudrücken:

$$A = - \frac{U_c}{U_{CC} \frac{\partial}{\partial W} c} > 0 \quad (4.39)$$

und

$$H_k = - \frac{\frac{\partial}{\partial \xi_k} c}{\frac{\partial}{\partial W} c}. \quad (4.40)$$

Diskussion:

Das in eine Anlage investierte Vermögen ergibt sich gemäß (4.38) durch Summierung aus zwei Anteilen. Der erste Summand $A \sum_1^n \nu_{ij} (\alpha_j - r)$ ist die gewöhnliche Nachfragefunktion für eine risikobehaftete Anlage, die ein Anleger wählt, sofern er seine Anlage nur für eine Periode plant und eine Erwartungswert-Varianz-Optimierung durchführt. Dieser Wert wird mit dem Faktor A gewichtet. A ist reziprok zur absoluten Risikoaversion des Investors. Der zweite Summand $\sum_1^m \sum_1^n H_k \sigma_j g_k \eta_{kj} \nu_{ij}$ beschreibt die zusätzliche Nachfrage bzw. falls negativ die verringerte Nachfrage nach einer Anlage, die zur Absicherung von eventuellen Verschlechterungen der zukünftigen Konsummöglichkeiten dient. Eine Verschlechterung stellt dabei ein durch veränderte Investitionsmöglichkeiten verringerter

Konsum dar. Da die Investitionsmöglichkeiten zur Zeit t vollständig durch den Zustandsvektor $\vec{\xi}(t)$ beschrieben werden, läßt sich eine Verschlechterung bei Vergrößerung der Zustandsvariablen ξ_k wie folgt ausdrücken:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} c < 0. \quad (4.41)$$

Der Term (4.41) ist nach (4.40) in (4.38) im zweiten Summanden vorhanden. Er bewirkt, daß in Anlagen, die eine starke positive Korrelation zur Zustandsvariablen k aufweisen, vermehrt investiert wird, sofern (4.41) erfüllt ist. Dies bedeutet, daß eine drohende Verringerung des möglichen Konsums durch einen vermehrten Kauf von den Anlagen kompensiert wird, die dann einen besonders hohen Ertrag bringen, falls die erwartete Entwicklung einer Zustandsvariablen des Kapitalmarktes eintritt. Diese Kompensation funktioniert natürlich auch in umgekehrter Richtung. Wenn daher die erwartete Entwicklung nicht eintritt, wird die zusätzlich gekaufte Anlage weniger Ertrag bringen. Dafür sind die Bedingungen für Konsum in dieser Situation bereits aufgrund der Annahme, daß (4.41) erfüllt ist, günstiger. Der Anleger ist daher bemüht, eine Glättung des Konsums über die Zeit zu erreichen. Der zweite Summand in (4.38) besitzt daher die Funktion, mögliche zukünftige Änderungen der Kapitalmarktparameter heute zu berücksichtigen.

Die allgemeine Behandlung des hier vorgestellten Modells wird zunächst zurückgestellt. Daher betrachten die folgenden Abschnitte Spezialfälle, die es erlauben, die Zahl der Zustandsparameter drastisch zu reduzieren. In den darauffolgenden Abschnitten werden sukzessive Parameter des Kapitalmarktes in den Zustandsvektor aufgenommen. Dadurch wird eine schrittweise Verfeinerung des Modells vorgenommen.

4.5 Betrachtung bei konstanten Kapitalmarktparametern

Die stärkste Vereinfachung des im vorigen Abschnitt vorgestellten Modells ergibt sich für den Fall, daß die Parameter des Kapitalmarktes als konstant angenommen werden. $\vec{\alpha}$, r und Σ werden daher konstant gesetzt. Der Zustandsvektor $\vec{\xi}$ enthält damit nur noch die Preisniveaus $\vec{P}$. In diesem Fall wird (4.38) zu

$$w_i^k W^k = A^k \sum_{j=1}^n \nu_{ij} (\alpha_j - r), \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.42)$$

wobei der obere Index k zur Unterscheidung der Investoren dient. (4.42) beschreibt genau die Nachfrage am Kapitalmarkt, die von Seiten der Anleger besteht, wenn sie nur eine Handelsperiode betrachten und sich risikoaversiv/Erwartungswert-Varianz-optimierend verhalten. Wenn die Investoren homogene Erwartungen haben, was in (4.42) durch den fehlenden Index k an ν_{ij} und α_j zum Ausdruck kommt, dann investieren sie alle zu gleichen Anteilen in die Anlagen.

(4.42) wurde bereits in Abschnitt 3.3.3 in Form von (3.45) abgeleitet. Dort wurde auch gezeigt, daß ein kombiniertes Anlagenpaar existiert, das bei den Investoren zu den gleichen Konsummöglichkeiten führt, wie die ursprünglichen n unsicheren und die eine sichere Anlage. Setzt man die eine kombinierte Anlage gleich der sicheren Anlage, so ergeben sich Anteile des kombinierten Portefeuilles zu

$$\delta_k = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} \nu_{kj}(\alpha_j - r)}{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \nu_{ij}(\alpha_j - r)}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (4.43)$$

(4.43) wurde in Form von (3.50) in Abschnitt 3.3.4 hergeleitet.

Unter der Bedingung, daß das Marktportefeuille gegeben durch (4.43) im Gleichgewicht effizient ist, läßt sich zeigen, daß Erträge einer Anlage folgender Gleichung genügen:

$$\alpha_i - r = \beta_i(\alpha_M - r), \quad i = 1, \dots, n \quad (4.44)$$

mit

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} \quad (4.45)$$

und σ_{iM} der Kovarianz der i -ten Anlage mit dem Marktportefeuille, σ_M^2 der Varianz und α_M dem erwarteten Ertrag des Marktportefeuilles. (4.44) entspricht der Wertpapiermarktlinie des klassischen CAPM.

Es läßt sich somit festhalten, daß sich die Investoren für die Annahme von konstanten Kapitalmarktparametern verhalten, als ob sie nur einzelne Perioden betrachten. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da eine Betrachtung über mehrere Perioden erst dann zusätzliche Informationen auswerten kann, wenn sich zwischen den einzelnen Perioden Veränderungen der Kapitalmarktparameter einstellen.

4.6 Der Zinssatz als einzige Zustandsvariable

Die Annahme, daß sämtliche Kapitalmarktparameter über die Zeit konstant sind, ist nicht besonders realistisch. Wie bereits angekündigt, wird das Modell weiter verfeinert. Zunächst wird daher ein weiterer wichtiger Parameter aufgenommen: der Zinssatz r . Der Zinssatz spielte bei vielen Untersuchungen und Modellen der Vergangenheit insbesondere beiden Modellen der Volkswirtschaftslehre eine herausragende Rolle. Er soll daher als erste veränderliche Zustandsvariable in das Modell aufgenommen werden. Die übrigen Kapitalmarktparameter lassen sich dann als Funktionen des Zinssatzes ausdrücken. Es gelte daher $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(r)$ und $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(r)$. Es ist zu beachten, daß die ausschließliche Zeitabhängigkeit, die mit (4.11) vorausgesetzt wurde, nun nicht mehr gilt. (4.38) stellt sich damit für

den k -ten Investor wie folgt dar:

$$d_i^k := w_i^k W^k = A^k \sum_{j=1}^n \nu_{ij}(\alpha_j - r) + H^k \sum_{j=1}^n \nu_{ij} \sigma_{jr}, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.46)$$

mit

$$H^k := -\frac{\frac{\partial}{\partial r} c^k}{\frac{\partial}{\partial W^k} c^k} \quad (4.47)$$

und σ_{jr} der augenblicklichen Kovarianz zwischen der Rendite der j -ten Anlage und der Änderung des Zinssatzes. (4.46) zeigt nun eine direkte Abhängigkeit der Nachfrage von den Präferenzen des einzelnen Investors. Dadurch werden die Anteile, die in einzelne Anlagen investiert werden, in Abhängigkeit von A^k und H^k verändert. Durch (4.42) wurde zuvor auch die Höhe der Nachfrage beeinflusst, jedoch war die Zusammensetzung des Portefeuilles unabhängig von den Präferenzen. (4.46) beschreibt dagegen verschiedene Portefeuilles.

4.6.1 Verallgemeinerte Separation — Ein drei-Fond Theorem

Aufgrund der Abhängigkeit der Nachfrage von den Präferenzen des einzelnen Investors, ist eine Rekonstruktion der für den Anleger möglichen optimalen Investition am Kapitalmarkt nicht mehr durch nur zwei kombinierte Anlagen möglich. Es ist ein zusätzlicher Freiheitsgrad in der Portfeuilleentscheidung aufgetreten. Diesem weiteren Parameter wird durch die Erweiterung des schon bekannten zwei-Fond-Theorem auf ein drei-Fond-Theorem Rechnung getragen. In Abschnitt 3.3.2 lagen die möglichen optimalen Portefeuilles auf einer Geraden im Raum der Wertpapieranteile. Diese Gerade wird nun durch den zusätzlichen Freiheitsgrad zu einer Ebene. Es stellt sich die Frage, welche Basisvektoren und welcher Aufpunkt zur Beschreibung dieser Ebene gewählt werden sollen.

Durch Einführung der Abkürzungen $p_i = \sum_{j=1}^n \nu_{ij}(\alpha_j - r)$ und $q_i = \sum_{j=1}^n \nu_{ij} \sigma_{jr}$ läßt sich (4.46) wie folgt schreiben:

$$d_i^k = A^k p_i + H^k q_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.48)$$

Zusätzlich ist die Nebenbedingung $\sum_{i=1}^{n+1} w_i = 1$ einzuhalten. Durch einfaches Einsetzen läßt sich zeigen, daß

$$\vec{d}_{(n+1)}^k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ W \end{pmatrix} + A^k \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \\ -\sum_{i=1}^n p_i \end{pmatrix} + H^k \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \\ -\sum_{i=1}^n q_i \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

(4.48) und die Nebenbedingung erfüllt. (4.49) stellt die parametrische Gleichung einer Ebene im $\mathbb{R}^{n+1}$ dar. Da eine Ebene durch drei Punkte aufgespannt wird, sind daher drei

Fonds erforderlich, um alle Konsummöglichkeiten und Anlagepräferenzen der Anleger zu befriedigen. Wird der Zinssatz als Zustandsvariable am Kapitalmarkt zugelassen, so wird aus dem zwei-Fond-Theorem daher ein drei-Fond-Theorem.

Prinzipiell wäre es möglich, drei beliebige verschiedene Wertepaare (A^k, H^k) in (4.48) einzusetzen, um die drei Punkte und damit die Portefeuille-Zusammensetzungen zu erhalten. Es ist jedoch zweckmäßig, möglichst einfache Aufpunkte zu wählen. Ein einfacher Aufpunkt ergibt sich für

$$(A^k = H^k = 0) \implies \vec{d}_{(n+1),1} = (0, \dots, 0, W)^T. \quad (4.50)$$

Ein weiterer einfacher Aufpunkt läßt sich durch die Annahme gewinnen, daß die q_i für $i \in \{1, \dots, n-1\}$ gleich Null sind, und $q_n \neq 0$ ist.

Es muß daher gelten:

$$\Sigma^{-1} \vec{\sigma}_r \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \quad a \neq 0 \implies \vec{\sigma}_r = \Sigma \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

bzw. in Komponentenschreibweise

$$\sigma_{ir} = a \sigma_{in} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} \rho_{ir} \sigma_i \sigma_r &= a \rho_{in} \sigma_i \sigma_n \\ \rho_{ir} &= a \frac{\sigma_n}{\sigma_r} \rho_{in} = \rho_{nr} \rho_{in} \end{aligned} \quad (4.53)$$

Um eine gute Interpretationsmöglichkeit des drei-Fond-Theorems zu erhalten, werde $\rho_{nr} = -1$ gewählt. Dies bedeutet, daß es eine Anlage gibt, die eine perfekte negative Korrelation mit dem Zinssatz aufweist. Dies ist für die Existenz des drei-Fond-Theorems nicht erforderlich, erleichtert jedoch die Anschauung und Interpretation desselben.

Durch die Wahl von $\rho_{nr} = -1$ liegt $a = -\sigma_r/\sigma_n$ fest, und (4.49) stellt sich dann wie folgt dar:

$$\vec{d}_{(n+1)}^k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ W \end{pmatrix} + A^k \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \nu_{1j}(\alpha_j - r) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \nu_{nj}(\alpha_j - r) \\ -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \nu_{ij}(\alpha_j - r) \end{pmatrix} + H^k \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\sigma_r/\sigma_n \\ \sigma_r/\sigma_n \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

und die übrigen Aufpunkte ergeben sich zu

$$(A^k = 0, H^k = 1) \implies \vec{d}_{(n+1),2} = (0, \dots, 0, -H^k \sigma_r/\sigma_n, W + H^k \sigma_r/\sigma_n)^T \quad (4.55)$$

$$(A^k = 1, H^k = 0) \implies \vec{d}_{(n+1),3} = (p_1, \dots, p_n, W - \sum_{i=1}^n p_i)^T. \quad (4.56)$$

(4.54) läßt auch wie folgt schreiben:

$$\vec{d}_{(n+1)}^k = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \nu_{1j}(\alpha_j - r) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \nu_{n-1j}(\alpha_j - r) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

mit $\lambda_1 = W + H^k \sigma_r / \sigma_n - A^k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \nu_{ij}(\alpha_j - r)$, $\lambda_2 = -H^k \sigma_r / \sigma_n + A^k \sum_{j=1}^n \nu_{nj}(\alpha_j - r)$ und $\lambda_3 = A^k$.

Interpretation:

(4.57) beschreibt die Punktmenge des $\mathbb{R}^{n+1}$, die zur Befriedigung aller möglichen Investorpräferenzen ausreichend ist. Diese Punktmenge in Form einer Ebene enthält die sichere Anlage, eine ideal negativ zur Zinsentwicklung korrelierte Anlage und ein Restportefeuille. Die sichere Anlage und das Restportefeuille erlauben dem Investor die Zusammenstellung eines effizienten Portefeuilles. Durch Einsetzen von H_k gemäß (4.40) in (4.57) ist zu erkennen, daß die negativ zur Zinsentwicklung korrelierte Anlage zur Absicherung von Zinsänderungsrisiken dient.

4.6.2 Das Anlageertragsgleichgewicht

Unter der Annahme, daß der Zins der einzige zusätzlich zu den Anlagepreisen ausgenommene Parameter des Kapitalmarktes ist, und auf Grundlage der im vorigen Abschnitt erhaltenen Nachfragefunktionen, werden nun die Gleichgewichtsbedingungen bei Markträumung abgeleitet. Auf dieser Basis wird eine Gleichgewichtsbeziehung zwischen dem erwarteten Ertrag einer Anlage mit erwarteten Ertrag des Marktportefeuilles hergestellt. Die Gesamtnachfrage aller K Investoren beträgt $D_i = \sum_{i=1}^K d_i^k$. Damit läßt sich (4.54) für n Komponenten wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} D_i &= A \sum_{i=1}^n \nu_{ij}(\alpha_j - r), \quad i = 1, \dots, n-1 \\ D_n &= A \sum_{i=1}^n \nu_{nj}(\alpha_j - r) - H \frac{\sigma_r}{\sigma_n} \end{aligned} \quad (4.58)$$

mit $A := \sum_{k=1}^K A^k$ und $H := \sum_{k=1}^K H^k$. N_i seien die vom i -ten Unternehmen ausgegebenen Anteile. Das $n+1$ -te Unternehmen gebe dabei Anteile der sicheren Anlage aus. Unter der Annahme des Marktgleichgewichts ergibt sich

$$N_i = \sum_{i=1}^K N_i^k, \quad i = 1, \dots, n+1$$

$$dN_i = \sum_{i=1}^K dN_i^k, \quad i = 1, \dots, n+1. \quad (4.59)$$

M sei der Gleichgewichtsgesamtwert aller Anlagen am Kapitalmarkt und errechne sich wie folgt:

$$M := \sum_{i=1}^{n+1} N_i P_i = \sum_{i=1}^K W^k = \sum_{i=1}^{n+1} D_i. \quad (4.60)$$

Für dM ergibt sich mit Itô's Lemma:

$$\begin{aligned} dM &= \sum_{i=1}^{n+1} N_i dP_i + \sum_{i=1}^{n+1} dN_i (P_i + dP_i) \\ &= \sum_{i=1}^K dW^k \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^{n+1} D_i \frac{dP_i}{P_i}}_I + \underbrace{\sum_{i=1}^K (y^i - c^i) dt}_{II}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Der Term I in (4.61) ist die von allen Investoren in der i -ten Anlage investierte Geldmenge multipliziert mit der Rendite dieser Anlage. I stellt daher die Wertänderung des in der i -ten Anlage investierten Kapitals dar. Durch die Summation über alle Anlagen ergibt sich die Gesamtwertänderung. Der Term II korrigiert den Gesamtwert des Anlagenmarktes um den Konsum und das Einkommen der Investoren.

Ziel ist es nun, die Terme I und II in (4.61) anderen bekannten Größen zuzuordnen.

Es sei P_M der Preis pro Anteil des Marktportefeuilles. N sei die Anzahl Anteile der Marktportefeuilles, so daß $NP_M = M$ gilt. Dann gilt nach Itô's Lemma:

$$dM = N dP_M + dN(P_M + dP_M) \quad (4.62)$$

und $N dP_M$ sowie $dN(P_M + dP_M)$ sind durch

$$N dP_M := \sum_{i=1}^{n+1} N_i dP_i \quad (4.63)$$

$$dN(P_M + dP_M) := \sum_{i=1}^{n+1} dN_i (P_i + dP_i) \quad (4.64)$$

bestimmt. Mit (4.29) und (4.64) ergibt sich

$$\sum_{i=1}^K (y^i - c^i) dt = \sum_{i=1}^{n+1} N_i (P_i + dP_i) = dN(P_M + dP_M) \quad (4.65)$$

und mit (4.29) und (4.63)

$$\sum_{i=1}^{n+1} D_i \frac{dP_i}{P_i} = \sum_{i=1}^{n+1} N_i dP_i = N dP_M \quad (4.66)$$

Setzt man $w_i := N_i P_i / M = D_i / M$ der Anteil des i -ten Unternehmens am Gesamtwert des Marktes, so läßt sich für dP_M / P_M eine Form gemäß (4.8) durch Einsetzen von (4.28) und (4.66) in (4.61) gewinnen:

$$\frac{dP_M}{P_M} = \left[\sum_{i=1}^n w_i (\alpha_i - r) + r \right] dt + \sum_{i=1}^n w_i \sigma_i dz_i. \quad (4.67)$$

$$\alpha_i - r = \frac{M}{A} \sum_{j=1}^n w_j \sigma_{ij} + \frac{H \sigma_r}{A \sigma_n} \sigma_{in}, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.68)$$

Mit $\sigma_{iM} := \sum_{j=1}^n w_j \sigma_{ij}$ der augenblicklich erwarteten Kovarianz des Marktportefeuilles mit der i -ten Anlage läßt (4.68) wie folgt schreiben

$$\alpha_i - r = \frac{M}{A} \sigma_{iM} + \frac{H \sigma_r}{A \sigma_n} \sigma_{in}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.69)$$

Mit den zusätzlichen Abkürzungen $\alpha_M := \sum_{j=1}^n w_j (\alpha_j - r) + r$, und $\sigma_M^2 := \sum_{j=1}^n w_j \sigma_j \sigma_{jM}$ dem augenblicklich erwarteten Ertrag und der Varianz des Marktportefeuilles ergibt aus (4.68) durch Multiplikation mit w_i und Summation über die n Anlagen

$$\alpha_M - r = \frac{M}{A} \sigma_M^2 + \frac{H \sigma_r}{A \sigma_n} \sigma_{Mn}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.70)$$

Der Versuch, (4.70) auf eine Form zu bringen, wie sie vom klassischen CAPM bekannt ist, liefert

$$\alpha_i - r = \frac{\sigma_i (\rho_{iM} - \rho_{in} \rho_{nM})}{\sigma_M (1 - \rho_{nM}^2)} (\alpha_M - r) + \frac{\sigma_i (\rho_{in} - \rho_{iM} \rho_{nM})}{\sigma_n (1 - \rho_{nM}^2)} (\alpha_n - r) \quad (4.71)$$

für $i = 1, \dots, n - 1$. (4.71) läßt sich durch Einsetzen von $\alpha_M - r$ aus (4.70) und $\alpha_n - r$ aus (4.69) mit $i = n$ nach einiger Rechnung verifizieren und beschreibt im Gegensatz zur klassischen Wertpapiermarktlinie eine Wertpapiermarktebene.

Diskussion:

- $\rho_{nM}^2 \ll 1$ (geringe betragsmäßige Korrelation zwischen Marktportefeuille und Zinsentwicklung): Für die Prämisse $\rho_{nM}^2 \rightarrow 0$ wird (4.71) zu

$$\alpha_i - r = \underbrace{\frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}}_{\beta_i} (\alpha_M - r) + \frac{\sigma_{in}}{\sigma_n^2} (\alpha_n - r). \quad (4.72)$$

Es ist zu erkennen, daß die Investoren jeweils für die Übernahme von zwei Risikoarten entschädigt werden: 1. das systematische Risiko, das in Bezug zum Marktportefeuille bewertet wird und bereits aus dem klassischen CAPM bekannt ist, und 2. das Risiko einer ungünstigen Änderung der Kapitalmarktparameter. Es ist zu beachten, daß die erwartete Rendite für den Fall $\beta_i = 0$ keineswegs gleich der der sicheren Anlage ist. Dieser Sachverhalt wird im nächsten Abschnitt näher diskutiert.

- $\rho_{nM}^2 \simeq 1$ (hohe betragsmäßige Korrelation zwischen Marktportefeuille und Zinsentwicklung): Ausgehend von (4.69) erhält man für $i = 1, \dots, n-1$ und $\rho_{nM}^2 \rightarrow 1$:

$$\begin{aligned}
 \alpha_i - r &= \frac{M}{A} \sigma_{iM} + \frac{H \sigma_r}{A \sigma_n} (\sigma_{in} + a - a), \text{ mit } a = \sigma_{iM} - \sigma_{in} \\
 &= \sigma_{iM} \left(\frac{M}{A} + \frac{H \sigma_r}{A \sigma_n} \right) - \underbrace{(\sigma_{iM} - \sigma_{in})}_{= 0 \text{ für } \rho_{nM}^2 = 1} \frac{H \sigma_r}{A \sigma_n} \\
 (\text{mit (4.70)} \Rightarrow) &= \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} (\alpha_M - r)
 \end{aligned} \tag{4.73}$$

Im Grenzfall der vollständigen betragsmäßigen Korrelation zwischen Marktportefeuille und Zinsentwicklung ergibt sich das Ergebnis des klassischen CAPM. Es stellt sich allerdings die Frage, wie relevant dieser Fall für die Praxis ist. Daher wird im Anschluß an diese Diskussion nach weiteren Konstellationen gesucht, die Wertpapiermarktebene in eine Wertpapiermarktklinie übergehen lassen.

- $0 < \rho_{nM}^2 < 1$ (mittlere betragsmäßige Korrelation zwischen Marktportefeuille und Zinsentwicklung): In diesem Fall bewegt sich die Bewertung des Wertpapiers zwischen den beiden vorherigen Extrema. Dieser Fall wird in der Praxis am häufigsten zu finden sein.

4.6.3 Konstellationen die zur klassischen Wertpapiermarktklinie führen

Diese Betrachtung ist aus zwei Gründen von Bedeutung. Erstens sollte eine neuere umfassendere Theorie eine weniger umfassende Theorie enthalten. Zweitens läßt sich auf diese Weise feststellen, unter welchen Bedingungen die Aussagen des klassischen CAPM besonders zuverlässig sein sollten.

Nach (4.69) existieren drei Möglichkeiten, den zweiten Summand in (4.71) zu Null werden zu lassen:

1.

$$H = \sum_{k=1}^K - \frac{\frac{\partial}{\partial r} c^k}{\frac{\partial}{\partial W^k} c^k} \equiv 0 \tag{4.74}$$

Es ist schwer einzusehen warum (4.74) außer für $\partial c^k / \partial r \equiv 0$ für beliebige Summanden erfüllt sein sollte. Die einzige additive Nutzenfunktion, die dies gewährleisten würde, wäre die logarithmische Bernoulli-Nutzenfunktion und stellt damit eine nicht zu rechtfertigende Einschränkung dar.

2.

$$g \equiv 0 \tag{4.75}$$

(4.75) bedeutet, daß sich der Zins nicht stochastisch entwickelt. Dies läßt sich in der Praxis nicht bestätigen. (4.75) entspricht einer Modellrückführung auf das klassische CAPM, da hier die stochastische Entwicklung des Zinses keine Berücksichtigung findet.

3.

$$\sigma_{ir} \equiv 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.76)$$

(4.76) setzt voraus, daß die Erträge aller Anlagen vollkommen unkorreliert mit der Zinsentwicklung sind. Unter der hier gestellten Voraussetzung, daß sich der Markt in einem Gleichgewicht befindet, ist (4.76) nicht möglich.

Im Laufe der Ableitung wurde die Existenz einer Anlage vorausgesetzt, die eine perfekte negative Korrelation mit der Zinsentwicklung aufweist. Dies ist für die Existenz des drei-Fond-Theorems nicht erforderlich, beeinflußt jedoch die Wahl der Basis für die Wertpapiermarktebene.

4.6.4 Übereinstimmung mit empirischen Ergebnissen

Black, Jensen und Scholes fanden heraus, daß Portefeuilles, die so zusammengesetzt waren, daß sie eine Kovarianz von Null mit dem Marktportefeuille ($\beta = 0$) hatten, einen erwarteten Ertrag aufwiesen, der signifikant höher als der der risikolosen Anlage war. Dies legt den Schluß nahe, daß es weitere Faktoren neben β gibt, die den Ertrag eines Wertpapiers beeinflussen. Das Ergebnis der empirischen Untersuchungen von Black, Jensen und Scholes läßt sich wie folgt beschreiben:

$$\alpha_i - r = \beta_i(\alpha_M - r) + \gamma_i(\beta)(\alpha_0 - r). \quad (4.77)$$

Darin ist α_0 der erwartete Ertrag eines Portefeuilles falls $\beta_i = 0$. Empirisch wurde darüber hinaus

$$\gamma_i(1) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial \beta_i} < 0 \quad (4.78)$$

gefunden. Dies bedeutet, daß Wertpapiere mit hohen β -Faktoren einen geringeren und solche mit niedrigen β -Faktoren einen höheren Ertrag als nach dem klassischen CAPM erwartet erbrachten.

Eine Analyse des Terms $\sigma_i(\rho_{in} - \rho_{iM}\rho_{nM})/\sigma_n(1 - \rho_{nM}^2)$ in (4.71) zeigt, daß er genau die in (4.78) geforderten Bedingungen erfüllt. Die Einbeziehung des Zinses in die Zustandsvariablen des Kapitalmarktes bringt somit eine Modellverfeinerung mit sich, die es erlaubt, in der Praxis auftretende Phänomene zu beschreiben, die im klassischen CAPM nicht berücksichtigt werden.

4.7 Betrachtung des allgemeinen Modells

Dieser Abschnitt greift wieder auf das in Abschnitt 4.2.3 entwickelte allgemeine Modell zurück. Im folgenden wird $S_i > 0$, $i = 1, \dots, m$ für alle t vorausgesetzt. Dies ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, da sich das Intervall $[0, \infty)$ durch geeignete Abbildungen auf jedes beliebige andere transformieren läßt. dS läßt sich damit in Analogie zu (4.18) wie folgt schreiben:

$$dS_i = f_i(\vec{S}, t)S_i dt + g_i(\vec{S}, t)S_i dq_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.79)$$

Man beachte, daß (4.79) im Gegensatz zu (4.23) auf der rechten Seite mit S_i multipliziert ist. Damit wird (4.38) zu

$$d_i = A \sum_{j=1}^n \nu_{ij}(\alpha_j - r) + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n H_k S_k g_k \sigma_j \eta_{kj} \nu_{ij}, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.80)$$

mit $A = -J_W/J_{WW}$ und $H_k = -J_{kW}/J_{WW}$. Die Interpretation von A gemäß (4.39) bleibt bestehen. H_k bestimmt sich im Gegensatz zu (4.40) jedoch als

$$H_k = -\frac{\frac{\partial}{\partial S_k} c}{\frac{\partial}{\partial W} c} - \frac{U_{cS_k}}{U_{CC} \frac{\partial}{\partial W} c}. \quad (4.81)$$

4.7.1 Zusammenstellung von Fonds zur Absicherung gegen Änderungen der Kapitalmarktparameter

In Abschnitt 4.5 wurde gezeigt, daß unter der Annahme, daß die Kapitalmarktparameter nicht stochastisch sind, und die Präferenzen der Investoren nicht vom Zustand des Kapitalmarktes abhängen, zwei kombinierte Anlagen ausreichen, um sämtliche möglichen Konsumallokationen zu rekonstruieren. Abschnitt 4.6.1 führte den Zins als Kapitalmarktparameter ein. Daraufhin wurden drei kombinierte Anlagen erforderlich um den Raum der möglichen Konsumallokationen aufzuspannen. Abschnitt 4.7 betrachtet einen Kapitalmarkt mit m Zustandsvariablen. Die folgenden Ausführungen werden entsprechend auf die Ableitung eines $m + 2$ -Fond-Theorems hin vorgenommen.

$V_i(t)$ sei der Preis des i -ten Fonds zur Zeit t . $x_{ij}(t)$ ² sei der Wertanteil des Fonds, der zur Zeit t in die Anlage j , $j = 1, \dots, n$ investiert ist. $1 - \sum_{j=1}^n x_{ij}(t)$ sei der Anteil, der in die sichere Anlage investiert ist. Damit gilt

$$V_i(t) = \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij}(t) P_j(t) \quad (4.82)$$

²Die Betrachtung erfolgt im Gegensatz zu Merton, R. C.: „Continuous-Time Finance“, S. 501 nach den i -Fonds getrennt. Dadurch wird die weitere Rechnung besser nachvollziehbar.

Kauf auf Kredit und Leerverkauf seien erlaubt. Es sei jedoch $V(t) > 0 \forall t$ vorausgesetzt. Weiterhin folgt aus $V(t) = 0$, daß $x_{ij}(t) = 0$, $j = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, m$. Dies bedeutet, daß die $P_j(t)$ größer Null sind. dV/V läßt sich nun wie folgt schreiben:

$$\frac{dV_i}{V_i} = \left[\sum_{j=1}^n x_{ij}(\alpha_j - r) + r \right] dt + \sum_{j=1}^n x_{ij} \sigma_j dz_j. \quad (4.83)$$

Nach Abschnitt 4.4 ist die Anlagenachfrage der Investoren durch ihr Bemühen bestimmt, sich gegen zukünftige Risiken einer Verschlechterung der Kapitalmarktparameter abzusichern. Abschnitt 4.6.1 zeigte, daß das Ausmaß, in dem dieses Bemühen von Erfolg gekrönt wird, von der Art der Korrelation zwischen den Zustandsvariablen und den verfügbaren Anlagen abhängt.

Definiert man

$$Y_i(t) := \frac{S_i(t)}{V(t)}, \quad (4.84)$$

so beschreibt das Verhältnis

$$\frac{Y_i(t)}{Y_i(0)} = \frac{\frac{S_i(t)}{S_i(0)}}{\frac{V_i(t)}{V_i(0)}} \quad (4.85)$$

die unterschiedliche Entwicklung einer Zustandsvariablen bezogen auf die Entwicklung des Fonds. Die Verteilungsdichtefunktion von $Y_i(t)/Y_i(0)$ ist ein Maß für Güte, die ein Fond als Mittel zur Absicherung gegen die Zustandsvariable S_i erreicht. Durch Betrachtung des Logarithmus von Y_i ergibt sich aus (4.79) und (4.83) mit Hilfe von Itô's Lemma

$$\begin{aligned} d(\ln Y_i) &= d(\ln S_i) - d(\ln V) \\ &= \theta_i(t) dt + \phi_i(t) d\epsilon_i \end{aligned} \quad (4.86)$$

mit

$$\theta_i(t) = f_i - \frac{1}{2}g_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ij}x_{ik}\sigma_{jk} - r - \sum_{j=1}^n x_{ij}(\alpha_j - r) \quad (4.87)$$

$$\phi_i^2(t) = g_i^2 + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ij}x_{ik}\sigma_{jk} - 2 \sum_{j=1}^n x_{ij}\sigma_j\eta_{ij}g_i \quad (4.88)$$

und

$$d\epsilon_i = \begin{cases} 0 & \text{für } \phi_i(t) = 0 \\ \frac{g_i dq_i - \sum_{j=1}^n x_{ij}\sigma_j dz_j}{\phi_i(t)} & \text{sonst} \end{cases}, \quad (4.89)$$

einem Standard-Wiener-Prozeß.

Ausgehend von dem Ziel die unerwartete Diskrepanz zwischen S_i und V durch geeignete Wahl der x_{ij} zu minimieren und damit die Korrelation zwischen S_i und V zu maximieren, ist $\phi_i(t)$ in (4.86) zu minimieren. Durch Differentiation von (4.88) folgt

$$\frac{\partial}{\partial x_{ij}} \phi_i^2 = 2 \left(\sum_{k=1}^n x_{ik}\sigma_{jk} - \sigma_j\eta_{ij}g_i \right) \stackrel{!}{=} 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.90)$$

Nach Matrixinversion ergibt sich x_{ij} zu

$$x_{ij} = g_i \delta_{ij} \quad (4.91)$$

mit

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^n \nu_{kj} \sigma_k \eta_{ik}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.92)$$

Wird x_{ij} gemäß (4.91) bestimmt, so folgt der Korrelationskoeffizient zwischen dem Fond und der i -ten Zustandsvariablen zu

$$\begin{aligned} \rho_i^* &= \left(\sum_{j=1}^n \delta_{ij} \eta_{ij} \sigma_i \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \nu_{kj} \sigma_k \sigma_j \eta_{ik} \eta_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Da die Höhe der Korrelation zwischen Fond und Zustandsvariablen für die Absicherung gegen ungünstige Veränderungen der Zustandsvariablen maßgeblich ist, werden Fonds mit hohen Korrelationen zu den Zustandsvariablen in dem Portefeuille eines Anlegers eine wichtige Rolle spielen.

Es sei $V_i(t)$ der Preis pro Anteil eines Fonds, der speziell zur Absicherung gegen die i -te Zustandsvariable diene. Dann gilt

$$\frac{dV_i}{V_i} = \alpha_i^* dt + \sigma_i^* dz_i^*, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.94)$$

mit

$$\alpha_i^* = r + g_i \sum_{j=1}^n \delta_{ij} (\alpha_j - r) \quad (4.95)$$

$$\sigma_i^* = g_i \rho_i^* \quad (4.96)$$

$$dz_i^* = \frac{1}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \sigma_j dz_j \quad (4.97)$$

Durch Einsetzen von $x_{ij} = g_i \delta_{ij}$ in (4.86) folgt $\theta_i = f_i - \alpha_i^* - \phi_i^2/2$, $\phi_i^2 = [1 - (\rho_i^*)^2]g_i^2$ und $d\epsilon_i = (dq_i - \rho_i^* dz_i^*)/[1 - (\rho_i^*)^2]^{1/2}$ für $\rho_i^* < 1$. Nach Auflösen von (4.86) nach $d(\ln S_i)$ ergibt sich weiter

$$d(\ln S_i) = \left[\alpha_i^* - \frac{1}{2}(\sigma_i^*)^2 + \theta_i \right] dt + \sigma_i^* dz_i^* + \phi_i d\epsilon_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.98)$$

Es soll nun ein bemerkenswerter Zusammenhang zwischen $d\epsilon_i$ und den Renditen der Anlagen abgeleitet werden:

$$\begin{aligned}
\frac{dP_k}{P_k} d\epsilon_i &= (\alpha_k dt + \sigma_k dz_k) \cdot \frac{dq_i - \rho_i^* dz_i^*}{[1 - (\rho_i^*)^2]^{1/2}} \\
&= \frac{\sigma_k dz_k dq_i - \sigma_k \rho_i^* dz_k \frac{1}{\rho_i^*} \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \sigma_j dz_j}{[1 - (\rho_i^*)^2]^{1/2}} + \underbrace{a \cdot dt dq_i}_{=0} + \underbrace{b \cdot dt dz_k}_{=0} \\
&= \frac{\sigma_k \eta_{ik} dt - \sigma_k \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \sigma_j \rho_{jk}}{[1 - (\rho_i^*)^2]^{1/2}} \quad (4.99)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\left(g_i \eta_{ik} \sigma_k - \sum_{j=1}^n x_{ij} \sigma_{jk} \right)}_{=0} \frac{dt}{g_i [1 - (\rho_i^*)^2]^{1/2}} \\
&= 0 \quad (4.100)
\end{aligned}$$

$g_i \eta_{ik} \sigma_k - \sum_{j=1}^n x_{ij} \sigma_{jk}$ ist wegen (4.90) gleich Null. (4.100) sagt aus, daß die $d\epsilon_i$ keine Korrelation zu den Renditen der Anlagen und damit auch den Portefeuilles besitzen. Aus (4.98) folgt zusammen mit (4.99) und (4.90):

$$\frac{dS_i}{S_i} \frac{dP_k}{P_k} = g_i \sigma_k \eta_{ik} dt \stackrel{(4.90)}{=} \sum_{j=1}^n x_{ij} \sigma_{jk} dt \stackrel{(4.99)}{=} \sigma_i^* \sigma_k (dz_i^* dz_k) = \frac{dV_i}{V_i} \frac{dP_k}{P_k} \quad (4.101)$$

für $i = 1, \dots, m$ und $k = 1, \dots, n$. Aus (4.101) ergibt sich

$$\frac{dS_i}{S_i} = \frac{dV_i}{V_i} \quad (4.102)$$

$$f_i dt + g_i dq_i = \alpha_i^* dt + \sigma_i^* dz_i^*. \quad (4.103)$$

Mit (4.98) folgt weiter

$$g_i dq_i = \sigma_i^* dz_i^* + \phi_i d\epsilon_i \quad (4.104)$$

und

$$\eta_{ik}^* := \frac{dq_i dz_k^*}{dt} = \frac{\sigma_i^* (dz_i^* dz_k^*)}{g_i dt}, \quad i, k = 1, \dots, m \quad (4.105)$$

Der $m+1$ -te Fond sei so konstruiert, daß er ein gewöhnliches Erwartungswert-Varianz-optimales Portefeuille aus risikobehafteten Anlagen darstellt. Nach (4.43) bestimmen sich die Anteile der n Anlagen zu $x_{m+1k} = [\sum_{j=1}^n \nu_{kj} (\alpha_j - r)] / \lambda$, $k = 1, \dots, n$, $\lambda > 0$. Der Faktor λ wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich Eins gesetzt, da er durch die spätere Portefeuilleauswahl unbedeutend wird. Der Fond $m+1$ stellt damit das wachstumsoptimale Portefeuille dar.

4.7.2 Bewertung der Fonds

Der Fond $m+2$ repräsentiere die sichere Anlage. Es gelte daher $dV_{m+2}/V_{m+2} = r dt$.

Die Differentialgleichung für die Rendite des $m + 1$ -ten Fonds ist

$$\frac{dV_{m+1}}{V_{m+1}} = \alpha_{m+1}^* dt + \sigma_{m+1}^* dz_{m+1}^* \quad (4.106)$$

mit

$$\alpha_{m+1}^* = r + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \nu_{kj} (\alpha_j - r) (\alpha_k - r) \quad (4.107)$$

und

$$(\sigma_{m+1}^*)^2 = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \nu_{kj} (\alpha_j - r) (\alpha_k - r) = \alpha_{m+1}^* - r > 0 \quad (4.108)$$

sowie

$$dz_{m+1}^* = \frac{1}{\sigma_{m+1}^*} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \nu_{kj} (\alpha_j - r) \sigma_k dz_k. \quad (4.109)$$

dz_{m+1}^* ist ein Standard-Wiener-Prozeß.

Es soll nun eine Beziehung ähnlich der Wertpapiermarktklinie zwischen der Rendite des Erwartungswert-Varianz-effizienten Portefeuilles dV_{m+1}/V_{m+1} und der Rendite eines beliebigen andern Fonds dV/V hergestellt werden. Dann gilt für den erwarteten Ertrag α des Fonds

$$\alpha - r = \sum_{j=1}^n x_j (\alpha_j - r) = \underbrace{\frac{\sum_{j=1}^n x_j (\alpha_j - r)}{\alpha_{m+1}^* - r}}_{\beta} (\alpha_{m+1}^* - r) \quad (4.110)$$

Wegen $\Sigma^{-1}\Sigma = \mathbf{1}$ gilt

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_j (\alpha_j - r) \sum_{k=1}^n \nu_{ki} \sigma_{kj}}{\alpha_{m+1}^* - r} \quad (4.111)$$

Mit der Substitution

$$\frac{1}{\sigma_{m+1}^*} \frac{1}{dt} \sigma_j dz_j dz_{m+1}^* = \frac{1}{\lambda(\sigma_{m+1}^*)^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \nu_{ki} (\alpha_i - r) \sigma_{kj} \quad (4.112)$$

und $\alpha_{m+1}^* - r = \lambda(\sigma_{m+1}^*)^2$ folgt

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{\sigma_{m+1}^*} \frac{1}{dt} \sum_{j=1}^n x_j \sigma_j dz_j dz_{m+1}^* \\ &= \frac{1}{dt} \underbrace{\frac{1}{(\sigma_{m+1}^*)^2}}_{(dV_{m+1}/V_{m+1})^{-2}} \underbrace{\sigma_{m+1}^* dz_{m+1}^*}_{\text{von } dV_{m+1}/V_{m+1}} \underbrace{\sum_{j=1}^n x_j \sigma_j dz_j}_{\text{von } dV/V} \\ &= \frac{\frac{dV}{V} \frac{dV_{m+1}}{V_{m+1}}}{\left(\frac{dV_{m+1}}{V_{m+1}}\right)^2} \end{aligned} \quad (4.113)$$

(4.110) mit β gemäß (4.113) ist die „Wertpapiermarktklinie“ für einen Fond.

4.7.3 Das $(m + 2)$ -Fond Theorem

Satz:

Es existieren $m + 2$ kombinierte Fonds, die aus den n risikobehafteten Anlagen und der risikolosen Anlage bestehen, so daß

- (a) alle risikoaversiven Anleger indifferent gegenüber der Investition in die $m + 2$ kombinierten Fonds oder den ursprünglichen $n + 1$ Anlagen sind.
- (b) die Anleger keine Informationen über Kapitalmarktparameter eines speziellen Wertpapiers oder dessen Anteile in den Fonds benötigen.
- (c) die Zusammenstellung der Fonds unabhängig von den Präferenzen der Anleger geschehen kann.

Beweis:

(a) Es gelte

$$\sigma_{ij}^* = \text{cov} \left(\frac{dV_i}{V_i}, \frac{dV_j}{V_j} \right), \quad i, j = 1, \dots, m + 1 \quad (4.114)$$

$$(\Sigma^*)_{ij} = \sigma_{ij}^*, \quad \text{und} \quad ((\Sigma^*)^{-1})_{ij} = \nu_{ij}^* \quad (4.115)$$

Es gilt damit $(\Sigma^*)^{-1} \Sigma^* = \Sigma^* (\Sigma^*)^{-1} = \mathbf{1}$. Nun werden in (4.80) die statistischen Parameter der Fonds eingesetzt.

$$d_i^* = A \sum_{j=1}^{m+1} \nu_{ij}^* (\alpha_j^* - r) + \sum_{k=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} H_k S_k g_k \sigma_j^* \eta_{kj}^* \nu_{ij}^*, \quad i = 1, \dots, m + 1 \quad (4.116)$$

mit $\eta_{kj}^* = (dq_k / dz_j^*) / dt$. (4.116) beschreibt die Zusammensetzung des optimalen Gesamtportefeuilles, das aus durch die Fonds gebildet wird. Mit (4.105) folgt $\eta_{kj}^* = \sigma_{kj}^* / g_k \sigma_j^*$.

Damit folgt für den rechten Summanden aus (4.116)

$$\sum_{k=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} H_k S_k g_k \sigma_j^* \eta_{kj}^* \nu_{ij}^* = \sum_{k=1}^m H_k S_k \sum_{j=1}^{m+1} \sigma_{kj}^* \nu_{ij}^* = \begin{cases} H_i S_i & \text{für } i = 1, \dots, m \\ 0 & \text{für } i = m + 1 \end{cases}. \quad (4.117)$$

Es gilt weiterhin

$$\alpha_j^* - r = \lambda \sigma_{j, m+1}^*, \quad j = 1, \dots, m + 1. \quad (4.118)$$

λ wurde in Abschnitt 4.7.2 o.B.d.A. gleich Eins gesetzt. Damit folgt für den linken Summanden aus (4.116)

$$\sum_{j=1}^{m+1} \nu_{ij}^* (\alpha_j^* - r) = \sum_{j=1}^{m+1} \nu_{ij}^* \sigma_{j, m+1}^* = \begin{cases} 0 & \text{für } i = 1, \dots, m \\ 1 & \text{für } i = m + 1 \end{cases}. \quad (4.119)$$

Es gilt daher

$$d_i^* = \begin{cases} H_i S_i & \text{für } i = 1, \dots, m \\ A & \text{für } i = m + 1 \\ W - \sum_{i=1}^{m+1} d_i^* & \text{für } i = m + 2 \end{cases}. \quad (4.120)$$

Durch Einsetzen von (4.91) in (4.120) erhält man die Anteile, die an den ursprünglichen $n + 1$ Anlagen gehalten werden.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m d_i^* g_i \sum_{j=1}^n \nu_{kj} \sigma_k \eta_{ik} &+ d_{m+1}^* \sum_{k=1}^n \nu_{jk} (\alpha_k - r) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n H_i S_i g_i \nu_{kj} \sigma_k \eta_{ik} + A \sum_{k=1}^n \nu_{jk} (\alpha_k - r) \\ &= d_j \end{aligned} \quad (4.121)$$

(4.121) zeigt, daß die Fonds den Raum der optimalen Anlageportefeuilles aufspannen. Im Sprachgebrauch der lineare Algebra stellt der Übergang zu den Fonds einen Basiswechsel dar. (4.121) beschreibt die Koordinatentransformation zwischen den zwei Vektoren, die die Investorpräferenzen im Raum der Portefeuille-Zusammensetzungen bezüglich der beiden Basen repräsentieren.

(b) Für die Bestimmung der Anteile der Investoren an den Fonds wurden weder die statischen Parameter der ursprünglichen $n + 1$ Anlagen noch die Anteile dieser Anlagen in den Fonds benötigt.

(c) Die $m + 2$ Fonds lassen sich in drei Typen untergliedern:

1. Fonds, die der Absicherung gegen unerwartete Zustandsänderungen am Kapitalmarkt dienen und deren Zusammensetzung sich gemäß (4.91) ergibt:

Sie werden unabhängig von den Investorpräferenzen mit dem Ziel der maximalen Korrelation zu einer Zustandsvariablen bestimmt.

2. Der Erwartungswert-Varianz-effiziente Fond:

Außer der Annahme, daß sich alle Investoren risikoaversiv verhalten, werden keine weiteren Informationen über sie ihnen benötigt.

3. Der risikolose Fond:

Dieser Fond entspricht direkt der risikolosen Anlage. Daher sind keinerlei Informationen über die Investoren erforderlich.

Damit ist die Zusammensetzung der Fonds unabhängig von den Investoren. $\square$

Für den Beweis wurde die Existenz der inversen Kovarianzmatrix $(\Sigma^*)^{-1}$ vorausgesetzt. Ist dies nicht der Fall, so kann ein Fond durch Linearkombination aus den übrigen rekonstruiert werden. Ein Fond ist daher überflüssig und kann aus der Menge der Fonds

herausgenommen werden. Die Zahl der benötigten Fonds zur Rekonstruktion der Möglichkeiten der ursprünglichen Anlagen kann daher kleiner als $m + 2$ sein. Da die Dimension des aufgespannten Raumes durch Hinzufügen zusätzlicher Vektoren zur Basis nicht größer als die Dimension der Basis ($n + 1$) werden kann, werden für $m + 2 > n + 1$ immer redundante Fonds generiert werden. Andererseits besteht auch die Möglichkeit, daß es keine originären Wertpapiere gibt, die eine Korrelation mit der unerwarteten Entwicklung einer Zustandsvariablen des Kapitalmarktes besitzen. In diesem Fall können sich die Investoren nicht gegen Änderungen dieser Zustandsvariablen absichern. Geht man jedoch davon aus, daß in der Praxis wesentlich mehr Wertpapiere gehandelt werden, als es Zustandsvariablen des Kapitalmarktes gibt ($n \gg m$), so liefert das behandelte Theorem die Grundlage für das Fond-Management und die Separation von Informationen am Kapitalmarkt.

4.7.4 Auswertung der Gleichgewichtsbeziehungen

Bereits in Abschnitt 4.6.2 wurden Beziehungen für die erwarteten Preise der Anlagen abgeleitet. Dies wird nun auf den Fall mit mehreren Kapitalmarktparametern verallgemeinert. Nach dem $m + 2$ -Fond-Theorem genügt es, die Möglichkeiten des Kapitalmarktes für die Investoren bezüglich der $m + 2$ zusammengestellten Fonds zu betrachten. Im Marktgleichgewicht besteht das Marktportefeuille aus der Summation aller Anlagenanteile aller Fonds. Damit kann auch der Ertrag des Marktportefeuilles durch Summation der Erträge der $m + 2$ Fonds gewonnen werden. Analog zu 4.6.2 wird von den aggregierten Nachfragen nach den Fonds ausgegangen. Es gilt daher

$$D_i^* = \begin{cases} H_i' S_i & \text{für } i = 1, \dots, m \\ A' & \text{für } i = m + 1 \\ M - \sum_{i=1}^{m+1} D_i^* & \text{für } i = m + 2 \end{cases} \quad (4.122)$$

mit $A' = \sum_{k=1}^K A^k$, $H_i' = \sum_{k=1}^K H_i^k$ und $M = \sum_{k=1}^K W^k$. Setzt man

$$w_i^* := D_i^*/M, \quad (4.123)$$

so kann die Rendite des Marktportefeuille auf folgende Weise geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \frac{dP_M}{P_M} &= \sum_{i=1}^{m+1} w_i^* \left(\frac{dV_i}{V_i} - r dt \right) + r dt \\ &= \alpha_M dt + \sigma_M dz_M. \end{aligned} \quad (4.124)$$

Darin ist

$$\alpha_M = \sum_{i=1}^{m+1} w_i^* (\alpha_i^* - r) + r \quad (4.125)$$

$$\sigma_{iM}^* = \sum_{j=1}^{m+1} w_j^* \sigma_{ij}^* \quad (4.126)$$

$$\sigma_M^2 = \sum_{j=1}^{m+1} w_j^* \sigma_{jM}^* \quad (4.127)$$

$$dz_M = \frac{1}{\sigma_M} \sum_{j=1}^{m+1} w_j^* \sigma_j^* dz_j^*. \quad (4.128)$$

dz_M ist wieder ein Standard-Wiener-Prozeß.

Für risikoscheue Investoren gilt $w_{m+1}^* = A'/M > 0$. Dadurch läßt sich (4.124) wie folgt umschreiben:

$$\frac{dV_{m+1}}{V_{m+1}} = r dt + \sum_{i=1}^m \delta_i^* \left(\frac{dV_i}{V_i} - r dt \right) + \delta_M^* \left(\frac{dP_M}{P_M} - r dt \right) \quad (4.129)$$

mit $\delta_i^* = -w_i^*/w_{m+1}^*$, $i = 1, \dots, m$ und $\delta_M^* = 1/w_{m+1}^*$. (4.129) drückt den Erwartungswert-Varianz-effizienten Fond durch eine Kombination der sicheren Anlage, einem Portefeuille aus speziell gewichteten Fonds und dem Marktportefeuille aus. Im Sprachgebrauch der linearen Algebra entspricht der Übergang von (4.124) zu (4.129) dem Austausch eines Basisvektors und anschließende Darstellung des ausgetauschten Vektors durch die neue Basis. Formal: Sei $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_n)$ eine Basis eines n -dimensionalen Raumes und gelte $\vec{x}_{n+1} = \sum_{i=1}^n a_i \vec{x}_i$ mit $\vec{x}_{n+1} \neq \vec{0}$ sowie $\vec{x}_{n+1} \neq \vec{x}_i$ für $i = 1, \dots, n$, dann ist $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n+1}, \dots, \vec{x}_n)$ auch eine Basis des n -dimensionalen Raumes, und $\vec{x}_j$ läßt durch $\vec{x}_j = \sum_{i=1, i \neq j}^n \tilde{a}_i \vec{x}_i + \tilde{a}_j \vec{x}_{n+1}$ mit $\vec{x}_j \neq \vec{0}$ darstellen.

Dies bedeutet, daß die Voraussetzungen des $m+2$ -Fond-Theorems erfüllt sind. Wie im Teil (c) des Theorems dargestellt, erfordert die Zusammenstellung der m Hedge-Portefeuilles ausschließlich Informationen über die Kovarianzmatrix der gehandelten Anlagen. Informationen über die erwarteten Erträge sowie über die erwarteten Änderungen der Kapitalmarktzustandsvariablen sind nicht erforderlich. Dagegen sind für die Zusammenstellung des Erwartungswert-Varianz-effizienten Fonds zusätzlich Daten über die erwarteten Erträge aller Anlagen erforderlich. (4.129) zeigt nun eine Möglichkeit, den $m+1$ -ten Fond durch die sichere Anlage, die ersten m Fonds und das Marktportefeuille zu rekonstruieren. Da das Marktportefeuille jedoch direkt beobachtbar ist, läßt sich der Erwartungswert-Varianz-effiziente Fond durch (4.129) und (4.123) darstellen.

Dies ist deshalb von großer Bedeutung, da sich die Kovarianzen aufgrund der Annahme der zugrundeliegenden Itô-Prozesse am Markt wegen

$$\frac{dP_i}{P_i} \frac{dP_j}{P_j} = \sigma_{ij} dt \quad (4.130)$$

direkt beobachten lassen, die Erwartungswerte α_k jedoch nicht. Die Beobachtung der

Erwartungswerte α_k wird durch den Rausch-Prozeß gemäß

$$\frac{dP_i}{P_i} = \alpha_k dt + \sigma_k dz_k \quad (4.131)$$

gestört. Da das hier betrachtete Modell die Veränderung der Zustandsvariablen des Kapitalmarktes ausdrücklich zuläßt, wird der Einfluß von $\sigma_k dz_k$ in (4.131) auch durch statistische Zeitreihenanalysen der Kursentwicklungen je nach Verknüpfung mit den Zustandsvariablen und Veränderung derselben nicht in jedem Fall eliminiert werden können. Für das Fond-Management ist dies, wie oben gezeigt, irrelevant. Problematisch wirkt es sich jedoch für Investoren aus, die die Zusammenstellung ihrer Fonds betreiben, da sie Informationen über die erwarteten Erträge der Fonds in Form von $\alpha_1^*, \dots, \alpha_m^*, \alpha_M$ benötigen. Der folgende Abschnitt beschäftigt sich daher mit Möglichkeiten, die erwarteten Erträge der Fonds und der originären Anlagen zu bestimmen. Abschließend bleibt festzustellen, daß das Fond-Management und die Fond-Auswahl der Investoren zwei vollkommen separable Vorgänge sind.

4.7.5 Die Wertpapiermarkt-Hyperebene

Für die Ableitung der Gleichung der Wertpapiermarkt-Hyperebene wird folgender Satz, der hier nicht bewiesen werden soll, benötigt:

Eine Menge von linear unabhängigen Fonds generiert die Menge der optimalen Portefeuilles genau dann, wenn zu jeder Zeit t und für $k = 1, \dots, n$ gilt

$$\frac{dP_k}{P_k} = \underbrace{r dt + \sum_{i=1}^{m+1} b_{ik} \left(\frac{dV'_i}{V'_i} - r dt \right)}_{\text{I}} + \underbrace{d\psi_k}_{\text{II}} \quad (4.132)$$

mit

$$\begin{aligned} E_t\{d\psi_k\} &= 0 \\ d\psi_k \frac{dV'_i}{V'_i} &= 0, \quad i = 1, \dots, m+1 \\ d\psi_k \frac{dS_i}{S_i} &= 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Dieser Satz bedeutet, daß der tatsächliche Ertrag einer Anlage in zwei Teile I und II aufgespalten werden kann.

- Teil I

Dieser Anteil kann durch die Menge der Fonds mittels geeigneter Kombination erzeugt werden. Er hat daher einen systematischen Charakter.

- Teil II

Dieser Anteil besitzt weder mit den Erträgen der $m + 2$ Fonds noch mit den unerwarteten Zustandsänderungen des Kapitalmarktes eine Korrelation.

Es seien $(V'_1, \dots, V'_{m+2})$ die Preise für Fonds gemäß dem $m + 2$ -Fond-Theorem, bei denen jedoch der Erwartungswert-Varianz-effiziente Fond mittels (4.129) durch das Marktportefeuille ersetzt ist. Es gelte daher

$$V'_i = \begin{cases} V_i & \text{für } i = 1, \dots, m \\ P_M & \text{für } i = m + 1 \end{cases}, \quad \alpha'_i = \begin{cases} \alpha_i^* & \text{für } i = 1, \dots, m \\ \alpha_M & \text{für } i = m + 1 \end{cases} \quad (4.133)$$

und

$$\sigma'_{ij} = \begin{cases} \sigma_{ij}^* & \text{für } i, j = 1, \dots, m \\ \sigma_{iM}^* & \text{für } i = 1, \dots, m \wedge j = m + 1 \\ \sigma_M^2 & \text{für } i = j = m + 1 \end{cases} \quad (4.134)$$

Der Erwartungswert von (4.132) liefert dann

$$\alpha_k - r = \sum_{i=1}^{m+1} \beta_{ki}(\alpha'_i - r), \quad k = 1, \dots, n \quad (4.135)$$

mit

$$\beta_{ki} = \frac{1}{dt} \sum_{j=1}^{m+1} \nu'_{ij} \frac{dP_k}{P_k} \frac{dV'_j}{V'_j} \quad (4.136)$$

und $\nu'_{ij} = ((\Sigma')^{-1})_{ij}$.

Gleichung (4.135) beschreibt die Beziehung zwischen den erwarteten Erträgen der n Anlagen und den erwarteten Erträgen der $m + 1$ Fonds. Sie enthält den Spezialfall des klassischen CAPM und den des zuvor behandelten Marktzinsmodells und ist die Gleichung einer $m + 2$ -dimensionalen Hyperebene im $n + 1$ -dimensionalen Raum.

(4.135) beschreibt die Einteilung der Anlage in Risikoklassen mit Hilfe des $(m + 1)$ -dimensionalen Vektors $(\beta_{k1}, \dots, \beta_{km+1})$. Dieser Vektor klassifiziert die Anlagen nach ihrer Korrelation zu den Fonds. Dadurch werden die Anlagen in Bezug auf ihre Korrelation zu den Zustandsvariablen des Kapitalmarktes eingeordnet. Zwei Anlagen mit gleichen β -Vektoren besitzen die gleiche erwartete Rendite. Da (4.135) bezüglich der Risikoklassen eine Abbildung des $\mathbb{R}^{m+1}$ auf $\mathbb{R}$ darstellt, ist sie nicht umkehrbar eindeutig. Dies bedeutet, daß vom Ertrag eines Wertpapiers nicht auf seine Risikoklasse zurückgeschlossen werden kann.

Es ist offensichtlich, daß der in Abschnitt 4.7.4 vorgenommene Basistausch für beliebige Vektoren vorgenommen werden kann, sofern die dort genannten Bedingungen erfüllt sind. Auf diese Weise kann (4.135) zur Bewertung unbekannter Anlage oder Fonds auf tatsächlich vorhandene Informationen zugeschnitten werden.

Eine andere Möglichkeit zur Bestimmung des Anlageertrages wurde bereits in Abschnitt 4.7.2 in Form von (4.110) angegeben. Dazu wird dV/V in (4.110) durch dP_k/P_k ersetzt. Dies ist möglich, da P_k bezüglich der Basis bestehend aus den V_i dargestellt werden kann. Es genügt daher, die Kovarianzmatrix zwischen Anlageerträgen und wachstumsoptimalen Fond V_{m+1} zu kennen, um die Anlagen zu bewerten. In diesem Fall stellt sich jedoch die Frage, wie der wachstumsoptimale Fond am Kapitalmarkt identifiziert wird, da für seine Bestimmung gerade die Erträge der Anlagen benötigt werden.

Die Bestimmung der α'_i in (4.135) ist daher noch offen. Dazu wird (4.135) für $n = m + 1$ betrachtet. In diesem Fall beschreibt die Summation in (4.135) ein Produkt aus einer quadratischen $(m + 1) \times (m + 1)$ Matrix $\bar{B}$ mit einem Vektor. Diese Matrix besteht aus den Elementen $(\bar{B})_{ki} = \bar{\beta}_{ki}$ und enthält eine Auswahl von $m + 1$ aus n Zeilen der $n \times (m + 1)$ Matrix B , die aus den Elementen β_{ki} besteht. Wird die Regularität der Matrix $\bar{B}$ vorausgesetzt, läßt sich (4.135) durch Multiplikation mit der inversen Matrix B^{-1} nach α'_i auflösen:

$$\alpha'_i - r = \sum_{j=1}^{m+1} (B^{-1})_{ij} (\bar{\alpha}_j - r), \quad i = 1, \dots, m + 1. \quad (4.137)$$

Dies erfordert nun jedoch die Kenntnis von $m + 1$ $\bar{\alpha}_j$ aus der Menge der α_j . Das Vorgehen ist daher wie folgt: Ausgehend von $m + 1$ bekannten $\bar{\alpha}_j$, wird der erwarteten Ertrag der Fonds bestimmt und anschließend die erwartete Rendite der fehlenden $n - (m + 1)$ Anlagen berechnet. In Matrixschreibweise stellt sich dieses Vorgehen wie folgt dar:

$$\vec{\alpha} - r\vec{1} = B\bar{B}^{-1}(\vec{\alpha} - r\vec{1}). \quad (4.138)$$

Diskussion:

Das Ergebnis dieses Abschnitts weist damit zwei entscheidende Probleme auf:

1. Die Zustandsvariablen des Kapitalmarktes haben einen generischen Charakter. Die Identifizierung dieser Variablen mit realen Parametern des Kapitalmarktes muß erst noch geleistet werden.
2. Die Bestimmung der erwarteten Renditen erfolgt nicht vollständig aus dem Modell heraus. Es ist vielmehr die Kenntnis der erwarteten Renditen einer bestimmten Anzahl von Wertpapieren vorauszusetzen. Wie diese Kenntnis erlangt wird, bleibt unklar.

Diese Einwände machen eine empirische Überprüfung und Anwendung dieses Modells äußerst schwierig. An dieser Stelle zeigt sich eine Verwandtschaft des Modells mit der Arbitrage Pricing Theorie, die ebenfalls Probleme mit der Identifizierung der Preise

beeinflussenden Parameter hat. Die fehlende Kenntnis der relevanten Parameter so wie der unbekannte Zusammenhang dieser Parameter mit den erwarteten Renditen bereitet Schwierigkeiten. Wären die entscheidenden Parameter ausgemacht, so könnte durch entsprechende Zeitreihenbetrachtung eine Analyse der Korrelationen bzw. der funktionalen Zusammenhänge vorgenommen werden. Nachteilig an dem hier entwickelten Modell ist zusätzlich, daß mit Vergrößerung der Anzahl der Zustandsvariablen, um eine präziseren Abbildung der Realität zu erhalten, die Anzahl der als bekannt vorauszusetzenden erwarteten Renditen ebenfalls zunimmt.

4.8 Das auf der Konsumallokation basierende CAPM

Ein möglicher anderer Ansatzpunkt zur Lösung dieser Probleme ist die Annahme von Modellrelaxierungen. Dieser Abschnitt wird zeigen, daß für den Fall, daß die Investorpräferenzen unabhängig von den Zustandsvariablen sind, und der marginale Nutzen bezüglich des Konsums gleich demjenigen bezüglich des Wohlstands ist, eine relativ einfache Beziehung zwischen der erwarteten Rendite und dem Konsum der Investoren abgeleitet werden kann. Es handelt sich dabei um das Consumption-Based Capital Asset Pricing Model von Breeden.

4.8.1 Betrachtung der marginalen Nutzenfunktion bezüglich des Wohlstands

Zur Ableitung des Modells von Breeden werde zunächst eine infinitesimale Wohlstandsänderung dW betrachtet. Sie läßt sich unter Zuhilfenahme der im vorigen Abschnitt abgeleiteten Fonds wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned} dW = & \left[\sum_{i=1}^m H_i S_i (\alpha_i^* - r) + A(\alpha_{m+1}^* - r) + rW - c \right] dt \\ & + \sum_{i=1}^m H_i S_i \sigma_i^* dz_i^* + A\sigma_{m+1}^* dz_{m+1}^* \end{aligned} \quad (4.139)$$

Es sei

$$G(W, \vec{S}, t) := \frac{\partial J}{\partial W} = J_W \quad (4.140)$$

die marginale Nutzenfunktion bezüglich des Wohlstands. Mit (4.79) und (4.139) folgt unter Beachtung des Lemmas von Itô

$$\begin{aligned} \frac{dG}{G} = & \mu dt + \frac{J_{WW}}{J_W} \left(\sum_{i=1}^m H_i S_i \sigma_i^* dz_i^* + A\sigma_{m+1}^* dz_{m+1}^* \right) \\ & + \sum_{i=1}^m \left(\frac{J_{Wi}}{J_W} \right) S_i g_i dq_i \end{aligned} \quad (4.141)$$

mit μ der erwarteten Wachstumsrate von G .

Wegen $A = -J_W/J_{WW}$ und $J_{Wi}/J_W = H_i/A$ läßt mit (4.89) folgende Gleichung für dG/G angeben:

$$\begin{aligned} \frac{dG}{G} &= \mu dt - \sigma_{m+1}^* dz_{m+1}^* - \sum_{i=1}^m \frac{H_i S_i}{A} \underbrace{(\sigma_i^* dz_i^* - g_i dq_i)}_{\Phi_i d\epsilon_i} \\ &= \mu dt - \sigma_{m+1}^* dz_{m+1}^* + \sum_{i=1}^m \frac{H_i S_i}{A} \phi_i d\epsilon_i \end{aligned} \quad (4.142)$$

Wegen (4.100) folgt weiter

$$\frac{dP_k}{P_k} \frac{dG}{G} = -\frac{dP_k}{P_k} \sigma_{m+1}^* dz_{m+1}^* = -\frac{dP_k}{P_k} \frac{dV_{m+1}}{V_{m+1}}. \quad (4.143)$$

Durch Setzen von $V = P_k$ in (4.110) folgt mit (4.113):

$$\frac{dP_k}{P_k} \frac{dV_{m+1}}{V_{m+1}} = \frac{(\alpha_k - r)(\sigma m + 1)^2 dt}{\alpha_{m+1}^* - r}. \quad (4.144)$$

Nach (4.108) ist $(\alpha_{m+1}^* - r)/(\sigma_{m+1}^*)^2 = 1$. Es ergibt sich:

$$(\alpha_k - r) = -\frac{dP_k}{P_k} \frac{dG}{G} \frac{1}{dt}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (4.145)$$

Dies bedeutet, daß die erwartete Rendite einer Anlage gleich der negativen augenblicklichen Kovarianz zwischen der tatsächlichen Rendite und der tatsächlichen Wachstumsrate der marginalen Nutzenfunktionen der Investoren ist. Es ist zu beachten, daß (4.145) ohne weitere Annahmen abgeleitet wurde.

G tritt in (4.145) ohne Index bezüglich eines einzelnen Investors auf. Da diese Beziehung daher für alle Investoren gelten muß, folgt sofort:

$$\frac{dP_k}{P_k} \frac{dG^i}{G^i} = \frac{dP_k}{P_k} \frac{dG^j}{G^j}, \quad k = 1, \dots, n; \quad i, j = 1, \dots, K. \quad (4.146)$$

4.8.2 Gleichsetzung der marginalen Nutzenfunktionen

Sofern die Investoren sich gemäß (4.36) verhalten, folgt $U_c = J_W = G$. (4.145) läßt sich nun dahingehend interpretieren, daß die erwartete Rendite eines Wertpapiers durch die Kovarianzen zwischen den tatsächlichen Renditen der Wertpapiere mit der marginalen Nutzenfunktion des Konsums bestimmt ist.

Ähnlich wie die Wertpapiermarkt-Hyperebene in Form von (4.135) beschreibt (4.145) eine Gleichgewichtsbeziehung für die erwarteten Renditen der Wertpapiere. Allerdings setzt (4.145) im Gegensatz (4.135) Informationen über die Präferenzen der Investoren voraus. Da die Präferenzen der Investoren jedoch nur schwer zugänglich sind, ist bezüglich der allgemeinen Anwendbarkeit dieses Modells noch nichts gewonnen.

4.8.3 Zustandsunabhängigkeit der Nutzenfunktion

Um eine Lösung zu gewinnen, die nicht auf der Kenntnis der Investorpräferenzen basiert, werde nun die Zustandsunabhängigkeit der Nutzenfunktionen der Investoren vorausgesetzt. Es gelte daher: $U^q = U^q(c^q, t)$. Sofern c^q gemäß (4.36) gewählt wird, folgt wegen $U_c = G$ weiter

$$dG^q = U_{cc}^q dc^q + U_{ct}^q dt + \frac{U_{ccc}^q (dc^q)^2}{2} \quad (4.147)$$

Mit der Abkürzung $\Delta_q = E_t\{dc^q/c^q\}/dt$ folgt durch Umformen von (4.147) und im zweiten Schritt unter Verwendung von (4.142)

$$\begin{aligned} \frac{dc^q}{c^q} &= \Delta_q dt - \frac{1}{\delta^q} \left(\frac{dG^q}{G^q} - \mu^q dt \right) \\ &= \Delta_q dt + \frac{\sigma_{m+1}^*}{\delta^q} dz_{m+1}^* - \sum_{i=1}^m \Gamma_i^q S_i \phi_i d\epsilon_i \end{aligned} \quad (4.148)$$

mit $\delta^q = -U_{cc}c^q/U_c^q$ der relativen Risikoaversion des Investors bezüglich des Konsums und $\Gamma_i^q = H_i^q/A^q\delta^q = -N_{Wi}^q/U_{cc}^qc^q$, $i = 1, \dots, m$. Wegen $dc^q/c^q = -dG^q/G^q\delta^q$ folgt

$$\frac{dP_k}{P_k} \frac{dG^q}{G^q} = -\delta^q \frac{dP_k}{P_k} \frac{dc^q}{c^q}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (4.149)$$

Da (4.149) für jeden Investor q gelten muß, ergibt sich mit (4.145) und (4.146)

$$\alpha_k - r = \delta^q \frac{dP_k}{P_k} \frac{dc^q}{c^q} \frac{1}{dt}, \quad k = 1, \dots, n \quad (4.150)$$

(4.150) bedeutet, daß die erwartete Rendite einer Anlage direkt und für risikoaverse Investoren positiv proportional zu der augenblicklichen Kovarianz ihres tatsächlichen Ertrages mit der Wachstumsrate des Konsums des q -ten Investors ist.

Durch Betrachtung der aggregierten Größen

$$C = \sum_{q=1}^K c^q \quad (4.151)$$

der aggregierten Konsumrate und

$$\frac{dC}{C} = \sum_{q=1}^K x_q \frac{dc^q}{c^q} \quad (4.152)$$

der relativen Änderung der Konsumrate, wobei

$$x_q := \frac{c^q}{C} \quad (4.153)$$

der Anteil des q -ten Investors am Konsum ist, wird nun die Kernaussage von Breedens Analyse abgeleitet. Betrachtet wird Gleichung (4.150). Auf beiden Seiten wird mit x_q multipliziert und anschließend über q summiert:

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^K \frac{x_q}{\delta^q} (\alpha_k - r) &= \sum_{q=1}^K x_q \frac{dP_k}{P_k} \frac{dc^q}{c^q} \frac{1}{dt} \\ (\alpha_k - r) \underbrace{\sum_{q=1}^K \frac{x_q}{\delta^q}}_{1/\delta} &= \frac{dP_k}{P_k} \sum_{q=1}^K x_q \frac{dc^q}{c^q} \frac{1}{dt} \\ \beta_{kC} := \frac{\alpha_k - r}{\delta} &= \frac{dP_k}{P_k} \frac{dC}{C} \frac{1}{dt} \end{aligned} \quad (4.154)$$

Wegen $\delta^q > 0$ und $x_q \geq 0$ gilt

$$\delta > 0. \quad (4.155)$$

Fallunterscheidung:

1. $\beta_{kC} = 0$:

$$\alpha_k - r = 0 \quad (4.156)$$

2. $\beta_{kC} \neq 0$:

Gilt zusätzlich $\beta_{jC} \neq 0$, so kann der Quotient β_{kC}/β_{jC} betrachtet werden:

$$\begin{aligned} \frac{\beta_{kC}}{\beta_{jC}} &= \frac{\alpha_k - r}{\alpha_j - r} \\ \alpha_k - r &= \frac{\beta_{kC}}{\beta_{jC}} (\alpha_j - r) \end{aligned} \quad (4.157)$$

Als Satz formuliert:

Sei C die aggregierte Konsumrate. Gilt dann für jeden Investor q $U^q = U^q(c^q, t)$ und $U_c^q = J_W^q$, $q = 1, \dots, K$ so existiert ein

$$\beta_{kC} = \frac{dP_k}{P_k} \frac{dC}{C} \frac{1}{dt}, \quad (4.158)$$

so daß

$$\alpha_k - r = \begin{cases} 0 & \text{für } \beta_{kC} = 0 \\ \frac{\beta_{kC}}{\beta_{jC}} (\alpha_j - r), \quad k = 1, \dots, n & \text{für } \beta_{kC} \neq 0 \wedge \beta_{jC} \neq 0 \end{cases} \quad (4.159)$$

gilt.

Diskussion:

Im Gegensatz zu (4.145) erfordern (4.158) und (4.159) keine Informationen über Investorpräferenzen. Die stattdessen erforderlichen Daten über den aggregierten Konsum sind

relativ leicht zugänglich. Nach (4.154) ist erwartete Rendite eines Wertpapiers k wegen (4.155) eine streng monoton steigende Funktion der β_{kC} . Aus der strengen Monotonie folgt die globale Umkehrbarkeit dieser Funktion, so daß die β_{kC} eindeutig bestimmten Risikoklassen zugeordnet werden können. Aus der Monotonie folgt auch, daß ein Wertpapier, das sich prozyklisch zu den Änderungen des allgemeinen Konsums verhält ($\beta_{kC} > 0$), eine höhere erwartete Rendite als die sichere Anlage erbringen muß. Umgekehrt kann ein antizyklisches Wertpapier ($\beta_{kC} < 0$) eine geringere erwartete Rendite als den sicheren Zins erzielen und trotzdem von den Investoren gehalten werden. In sofern ist hier durch Austausch der Kovarianz des Wertpapiers mit dem aggregierten Konsum gegen die Kovarianz bezüglich des aggregierten Wohlstands eine Analogie zum klassischen CAPM herzustellen. Dies erklärt auch den Namen „Consumption-Based Capital Asset Pricing Model“ (CCAPM).

(4.158) und (4.159) erfordern keine Identifikation der Zustandsvariablen. Des weiteren reduziert sich die mehrdimensionale Risikoklassifizierung durch die $(\beta_{k1}, \dots, \beta_{km+1})$ auf ein einziges β_{kC} . Dies mag einerseits als eine Vereinfachung erscheinen, andererseits ist die Reduktion der Risikoklassifizierung mit einem Informationsverlust verbunden.

Es ist weiter zu bemerken, daß die Annahme von $U_c = J_W$ eine Einschränkung darstellt, die die Realitätsnähe des CCAPM deutlich verringert. Sobald Transaktionskosten auftreten, oder die beliebige Teilbarkeit der Anlagen nicht mehr gegeben ist, wird diese Annahme unrealistisch. Dagegen wurde für die Ableitung von (4.145) ebenso wie für die Wertpapiermarkt-Hyperebene in Form von (4.135) aus Abschnitt 4.7.5 nur die Gültigkeit der Bedingung (4.37) vorausgesetzt. Diese Gleichungen besitzen daher einen allgemeineren Gültigkeitsbereich.

Laut Merton³ gibt es bereits eine beträchtliche und stetig wachsende Zahl von empirischen Untersuchungen, die die Vorhersagen des CCAPM überprüfen. Dabei sind die Ergebnisse unterschiedlich. Laut Cornell ist es nicht unbedingt einfacher die β_{kC} gegen über den β_{ki} der Wertpapiermarkt-Hyperebene zu schätzen. Laut Mankiw und Shapiro ist die empirische Aussagekraft des klassischen CAPM sogar größer als die des CCAPM. Die verschiedenen Ergebnisse bezüglich der empirischen Aussagekraft mögen durch die unterschiedlich genaue Erfüllung der getroffenen Annahmen erklärt werden.

4.9 Abschließende Betrachtung

In diesem Kapitel wurde ein intertemporales Modell für den Kapitalmarkt abgeleitet, das die beschränkte Haftung der Anlagen und die Zustandsabhängigkeit der Nutzenfunktion berücksichtigt. Auf dieser Grundlage wurde ein $m + 2$ -Fond Theorem gewonnen. Diese

³vgl. Merton, R. C.: „Continuous-Time Finance“, Seite 518

$m + 2$ Fonds reichen aus, um sämtlichen Investorpräferenzen gerecht zu werden. Damit wurde die Möglichkeit zur Informationsseparation zwischen Fond-Managern und Investoren theoretisch begründet. Unter Voraussetzung der Gleichgewichtsbeziehungen war die Berechnung der erwarteten Rendite von Wertpapieren möglich. Es wurde gezeigt, daß das klassische CAPM in dieser Theorie enthalten ist und für welche Annahmen sich die umfassendere Theorie zum klassischen CAPM vereinfacht. Durch Aufstellung der Wertpapiermarkt-Hyperebenengleichung wurde die Mehrdimensionalität des Risikos eines Wertpapiers beschrieben. Für den Fall, daß die Investorpräferenzen zustandsunabhängig sind, und die marginalen Nutzenfunktionen bezüglich des Wohlstands und bezüglich des Konsums zu jeder Zeit gleich sind, kann das CCAPM angewandt werden, wodurch die Risikoklasse einer Anlage vollständig durch ihre Korrelation mit dem aggregierten Konsum gegeben ist.

Tabelle 4.1 stellt ausgewählte Eigenschaften des klassischen CAPM, des zustandsorientierten CAPM und des CCAPM gegenüber. Allen Modellen gemeinsam sind die Voraussetzungen 1.–6. aus Abschnitt 4.2.1 und die Annahme von homogenen Erwartungen. Für das zustandsorientierte CAPM und das CCAPM kommen die Voraussetzungen 7.–10. aus Abschnitt 4.2.2 hinzu. Für die Ableitung der Wertpapiermarkt-Hyperebene und des CCAPM wurde die Nutzenfunktion als nicht explizit zeitabhängig angenommen. Die in den vorherigen beiden Kapiteln zugelassene Zeitpräferenz fand keine Berücksichtigung. Ebenso fand der Nachlaß keine Berücksichtigung.

Abschließend sind insbesondere die folgenden Kritikpunkte an allen in Tabelle 4.1 aufgeführten Modellen relevant:

- Fehlende Berücksichtigung von Zeitpräferenzen
- Ausschließliche Gültigkeit der Beziehungen für einen Kapitalmarkt im Gleichgewicht

Für die in diesem Kapitel vorgestellten Modelle erweist sich die empirische Ermittlung der benötigten Daten zusätzlich als problematisch. Es werden genaue Schätzungen von augenblicklichen Kovarianzen benötigt. In der Praxis sind diese Forderungen jedoch konträr, da die Schätzung der Kovarianzen entweder genau und vergangenheitslastig oder ungenau und aktuell ist.

	klassisches CAPM	zustandsorientiertes CAPM	CCAPM
Voraussetzungen	• Normalverteilung der Preise • quadratische Nutzenfunktion	• logarithmische Normalverteilung der Preise • Gleichung (4.37)	• logarithmische Normalverteilung der Preise • Gleichung (4.37) • Unabhängigkeit der Nutzenfunktion von den Zustandsvariablen • $U_c = J_W$
mathematische Hilfsmittel	• Lagrange'sche Optimierung	• Markov-Prozesse • Bellman-Prinzip • Lagrange'sche Optimierung / Dynkin-Operator • stochastische Differentialgleichungen (Itô-Prozesse)	• Markov-Prozesse • Bellman-Prinzip • Lagrange'sche Optimierung / Dynkin-Operator • stochastische Differentialgleichungen (Itô-Prozesse)
mathematisches Ergebnis	$\alpha_k - r = \beta_k (\alpha_M - r)$ $\beta_k = \frac{\sigma_{kM}}{\sigma_M^2}$	$\alpha_k - r = \sum_{i=1}^{m+1} \beta_{ki} (\alpha'_i - r)$ $\beta_{ki} = \sum_{j=1}^{m+1} \nu'_{ij} \frac{dP_k}{P_k} \frac{dV'_j}{V'_j} \frac{1}{dt}$	$\alpha_k - r = \begin{cases} 0 & \text{für } \beta_{kC} = 0 \\ \frac{\beta_{kC}}{\beta_{jC}} (\alpha_j - r) + r & \text{für } \beta_{kC}, \beta_{jC} \neq 0 \end{cases}$ $k = 1, \dots, n$ $\beta_{kC} = \frac{dP_k}{P_k} \frac{dC}{C} \frac{1}{dt}$
Interpretation	• Bewertung eines Wertpapiers bezüglich der Korrelation zum Marktportefeuille	• Bewertung eines Wertpapiers bezüglich der Korrelation zum Marktportefeuille und zu zustandsabsichernden Fonds • Einteilung der Anlagen in Risikoklassen	• Bewertung eines Wertpapiers bezüglich der Korrelation zum Marktkonsum
Vorteile / Nachteile	• einfache Anwendbarkeit • teilweise fehlende Erklärung beobachteter Phänomene	• weitergehende Beschreibung beobachteter Phänomene • Voraussetzung der Kenntnis bestimmter erwarteter Renditen • Problem der Identifikation der Zustandsvariablen	• keine Zustandsvariablen • Einschränkung der Anwendbarkeit durch weitergehende Annahmen

Tabelle 4.1: Gegenüberstellung der betrachteten Modelle

5 Numerische Simulation

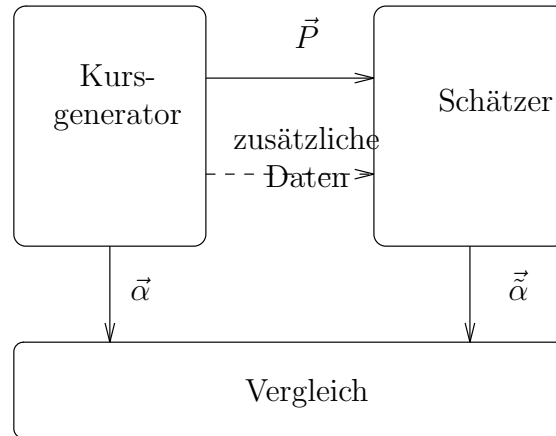


Abbildung 5.1: Schematischer Aufbau der Simulation

Abbildung 5.1 zeigt den Aufbau der hier betrachteten Simulationen. Der Kursgenerator erzeugt modellkonforme erwartete Renditen der Wertpapiere. Diese werden durch einen mehrdimensionalen Rauschprozeß mit der Kovarianzmatrix Σ gestört und in Form von $\vec{P}$ an den Schätzer weitergereicht. Dieser Schätzer versucht je nach zugrundeliegendem Modell, die erwarteten Renditen der Wertpapiere zurückzugewinnen. Ein Vergleich der vom Kursgenerator erzeugten und vom Schätzer gelieferten Werte erlaubt eine Beurteilung der Güte der Schätzung.

5.1 Generierung modellkonformer Anlagepreise

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit dem Aufbau des Kursgenerators in Abbildung 5.1. Die Simulation soll keine Daten aus der Realität benötigen und alle Vorgänge am Kapitalmarkt modellendogen berücksichtigen. Die nachfolgende schrittweise Entwicklung der Gleichungen, die zu einer modellkonformen Realisation der Anlagenpreise führt, wiederholt die wichtigsten in Kapitel 4 verstreuten Beziehungen. Dadurch wird der Zusammenhang und die praktische Anwendung dieser Gleichungen deutlich.

Ausgangspunkt für die modellkonforme Simulation ist Gleichung (4.135):

$$\alpha_k - r = \sum_{i=1}^{m+1} \beta_{ki}(\alpha'_i - r), \quad k = 1, \dots, n \quad (5.1)$$

mit

$$(B)_{ki} := \beta_{ki} = \frac{1}{dt} \sum_{j=1}^{m+1} \nu'_{ij} \frac{dP_k}{P_k} \frac{dV'_j}{V'_j}, \quad k = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m+1 \quad (5.2)$$

und $\nu'_{ij} = ((\Sigma')^{-1})_{ij}$.

Dabei gilt

$$V'_i = \begin{cases} V_i & \text{für } i = 1, \dots, m \\ P_M & \text{für } i = m+1 \end{cases}, \quad \alpha'_i = \begin{cases} \alpha_i^* & \text{für } i = 1, \dots, m \\ \alpha_M & \text{für } i = m+1 \end{cases} \quad (5.3)$$

und

$$\sigma'_{ij} = \begin{cases} \sigma_{ij}^* & \text{für } i, j = 1, \dots, m \\ \sigma_{iM}^* & \text{für } i = 1, \dots, m \wedge j = m+1 \\ \sigma_{jM}^* & \text{für } j = 1, \dots, m \wedge i = m+1 \\ \sigma_M^2 & \text{für } i = j = m+1 \end{cases}. \quad (5.4)$$

(5.2) lautet für $k = 1, \dots, n$ und $i = 1, \dots, m+1$ damit

$$(B)_{ki} = \frac{1}{dt} \left[\sum_{j=1}^m \nu'_{ij} \frac{dP_k}{P_k} \frac{dV_j}{V_j} + \nu'_{im+1} \frac{dP_k}{P_k} \frac{dP_M}{P_M} \right] \quad (5.5)$$

Mit der $(m+1) \times n$ Matrix X

$$(X)_{ij} = x_{ij} = \begin{cases} g_i \delta_{ij} & \text{für } i = 1, \dots, m \\ \sum_{k=1}^n \nu_{jk} (\alpha_k - r) & \text{für } i = m+1 \end{cases} \quad (5.6)$$

und

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^n \nu_{kj} \sigma_k \eta_{ik}, \quad j = 1, \dots, n \quad (5.7)$$

gilt nach (4.101)

$$\frac{dV_i}{V_i} \frac{dP_k}{P_k} = \sum_{j=1}^n x_{ij} \sigma_{jk} dt, \quad k = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m. \quad (5.8)$$

Es gilt ferner

$$\begin{aligned} \frac{dP_i}{P_i} \frac{dP_M}{P_M} &= dt \sigma_{iM} = dt \sum_{j=1}^n w_j \sigma_{ij} \\ &= dt \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^{m+1} x_{j_2 j_1} w_{j_2}^* \sigma_{ij_1} = dt \sum_{j_1=1}^{m+1} \sum_{j_2=1}^n w_{j_1}^* x_{j_1 j_2} \sigma_{j_2 i}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Einsetzen in (5.5) liefert:

$$(B)_{ki} = \sum_{j_1=1}^m \sum_{j_2=1}^n \nu'_{ij_1} x_{j_1 j_2} \sigma_{j_2 k} + \nu'_{im+1} \sum_{j_1=1}^{m+1} \sum_{j_2=1}^n w_{j_1}^* x_{j_1 j_2} \sigma_{j_2 k} \quad (5.10)$$

$$B^T = \left[\begin{pmatrix} \nu'_{11} & \nu'_{12} & \dots & \nu'_{1m} & 0 \\ \nu'_{21} & \nu'_{22} & \dots & \nu'_{2m} & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & 0 \\ \nu'_{m1} & \dots & & \nu'_{mm} & 0 \\ \nu'_{m+1,1} & \dots & & \nu'_{m+1,m} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu'_{1,m+1} \\ \vdots \\ \nu'_{m+1,m+1} \end{pmatrix} (\vec{w}^*)^T \right] X \Sigma \quad (5.11)$$

In (5.11) sind noch die $\nu'_{ij} = ((\Sigma')^{-1})_{ij}$ zu bestimmen. Dazu werden Σ^* , σ_{iM}^* und σ_M^2 benötigt.

Die Kovarianzmatrix Σ^* läßt sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^* &= \text{cov} \left(\frac{dV_i}{V_i}, \frac{dV_j}{V_j} \right) \\ &= \text{cov} \left(\sum_{k=1}^n x_{ik} \sigma_k \, dz_k, \sum_{k=1}^n x_{jk} \sigma_k \, dz_k \right) \\ &= \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n x_{ik_1} x_{jk_2} \sigma_{k_1} \sigma_{k_2} \text{cov}(dz_{k_1}, dz_{k_2}) \\ &= \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n x_{ik_1} x_{jk_2} \sigma_{k_1 k_2}\end{aligned}\tag{5.12}$$

$$\Sigma^* = X \Sigma X^T.\tag{5.13}$$

σ_{iM}^* und σ_M^2 ergeben sich aus

$$\sigma_{iM}^* = \sum_{j=1}^{m+1} w_j^* \sigma_{ij}^*, \quad i = 1, \dots, m+1\tag{5.14}$$

$$\sigma_M^2 = \sum_{j=1}^{m+1} w_j^* \sigma_{jM}^*.\tag{5.15}$$

Damit bleiben folgende Variablen zur Bestimmung übrig:

1. Die Kovarianzmatrix Σ der Wertpapiere wird zufällig bestimmt und ist damit gegeben.
2. η_{ij} beschreibt die Beziehungen zwischen den Prozessen und wird zufällig bestimmt.
3. $\vec{w}^*$ ist nach (4.123) durch $w_i^* := D_i^*/M$ gegeben und beschreibt daher den in den i -ten Fond investierten Anteil des Gesamtinvestitionsvolumens. M ist direkt beobachtbar. Dagegen ist D_i mit den Investorpräferenzen verknüpft und nicht beobachtbar. Aus diesem Grunde wird $\vec{w}^*$ zufällig erzeugt und ist damit gegeben.
4. $\vec{\alpha}^*$ ergibt sich mit $(\Delta)_{ij} = \delta_{ij}$ nach (4.95) zu

$$\alpha_i^* = r + g_i \sum_{j=1}^n \delta_{ij} (\alpha_j - r)\tag{5.16}$$

$$\vec{\alpha}^* = r \vec{1} + G \Delta (\vec{\alpha} - r \vec{1}).\tag{5.17}$$

(5.17) bildet $\vec{\alpha}$ auf $\vec{\alpha}^*$ ab. Es ist jedoch gerade $\vec{\alpha}$, das durch diese Berechnungen modellkonform bestimmt werden soll. Wegen $\dim(\vec{\alpha}) = n > \dim(\vec{\alpha}^*) = m$ ist die Abbildung in (5.17) nicht umkehrbar eindeutig. Daher werden die $\vec{\alpha}^*$ zufällig nach einem zu (4.12) analogen Prozeß erzeugt. Es gelte daher:

$$d\alpha_i^* = a_i^* dt + b_i^* dq_i^*\tag{5.18}$$

5.2 Bestimmung der erwarteten Renditen aus den Observablen

Dieser Abschnitt analysiert den Aufbau des Schätzers in Abbildung 5.1. Zunächst sei (4.135) noch einmal in Matrixschreibweise wiederholt:

$$\vec{\alpha} - r\vec{1} = B(\vec{\alpha}' - r\vec{1}) \quad (5.19)$$

mit B einer $n \times (m+1)$ -Matrix. Am Kapitalmarkt beobachtbar ist jedoch nicht $\vec{\alpha}$ sondern $\vec{P}$, das sich den Annahmen gemäß

$$\frac{dP_i}{P_i} = \alpha_i dt + \sigma_i dz_i \quad (5.20)$$

entwickelt. Durch Umformulierung in die zeitdiskrete Schreibweise ergibt sich

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_i((k+1)h) - P_i(kh)}{hP_i(kh)} - \frac{\sigma u_i(kh)}{h^{\frac{1}{2}}} = \alpha. \quad (5.21)$$

Es ist zu erkennen, daß (5.21) für $h \rightarrow 0$ nicht konvergiert. Diesem Sachverhalt wird in der Simulation durch Einsatz von gleitenden Mittelwerten Rechnung getragen. Hier genügt es $\tilde{P}_i := \frac{\Delta P_i}{P_i} \frac{1}{h}$ und $n_i := \sigma_i u_i \frac{1}{h^{1/2}}$ zu betrachten. Es gilt daher

$$\vec{\tilde{P}} = \vec{\alpha} + \vec{n}. \quad (5.22)$$

$\vec{n}$ ist dabei $N(\vec{0}, \Sigma)$ -verteilt. $\vec{\tilde{P}}$ ist daher $N(\vec{\alpha}, \Sigma)$ -verteilt. (5.22) stellt ein typisches Estimationsproblem¹ dar.

5.2.1 Maximum-Likelihood Estimation

Nach der Maximum-Likelihood Methode wird das Signal als gesendet angenommen, das am wahrscheinlichsten zu dem Empfangssignal geführt hat. Dies bedeutet in dem hier betrachteten Fall, daß der Schätzwert $\vec{\tilde{\alpha}}$ für $\vec{\alpha}$ ohne Ausnutzung weiterer Informationen über die spezielle Gestalt von $\vec{\alpha}$ zunächst durch

$$\vec{\tilde{\alpha}} = \vec{\tilde{P}} \quad (5.23)$$

bestimmt ist, da das Rauschen als mittelwertfrei angenommen wurde, und Ausprägungen des Rauschens um Null herum wegen der Normalverteilung am wahrscheinlichsten sind. Die Schätzung der erwarteten Renditen gemäß (5.23) liegt auf der Hand und ist trivial. Es gibt jedoch Möglichkeiten die Performance des Schätzers zu verbessern, wenn die speziellen Eigenschaften von $\vec{\alpha}$ ausgenutzt werden.

¹vgl. Melsa, James L.; Cohn, David L.: „Decision and Estimation Theory“, S. 179

5.2.2 Ausnutzung der Unterraumeigenschaft von $\{\vec{\alpha}\}$

(5.19) beschreibt eine lineare Abbildung des $\mathbb{R}^{m+1}$ auf den $\mathbb{R}^n$. Die möglichen tatsächlichen $\vec{\alpha}$ entstammen daher einem $m + 1$ -dimensionalen Unterraum im n -dimensionalen Raum. Daher muß auch der Schätzwert $\vec{\alpha}$ für $\vec{\alpha}$ ein Element dieses speziellen Raumes sein. Nach (5.19) gilt:

$$\vec{\alpha} = B(\vec{\alpha}' - r\vec{1}_{m+1}) + r\vec{1}_n \quad (5.24)$$

$$= B\vec{\alpha}' - rB\vec{1}_{m+1} + r\vec{1}_n. \quad (5.25)$$

(5.25) spannt einen Unterraum des $\mathbb{R}^n$ auf. Der Koordinatenursprung der Basis des Unterraums liegt bei $r(\vec{1}_n - B\vec{1}_{m+1})$ und die Basisvektoren sind durch die Spalten der Matrix B gegeben.

Durch Einsetzen von (5.25) in (5.22) ergibt sich:

$$\vec{P} = \underbrace{B\vec{\alpha}' + r(\vec{1}_n - B\vec{1}_{m+1})}_{\vec{\mu}'} + \vec{n}. \quad (5.26)$$

$\vec{P}$ ist daher $N(\vec{\mu}', \Sigma)$ -verteilt. Die bedingte Verteilungsdichte von $\vec{P}$ hat daher für gegebenes $\vec{\alpha}'$ folgende Gestalt²:

$$f(\vec{P}|\vec{\alpha}') = \frac{1}{(2\pi)^n \det \Sigma} e^{-\frac{1}{2}(\vec{P} - \vec{\mu}')^T \Sigma^{-1} (\vec{P} - \vec{\mu}')}. \quad (5.27)$$

Es sind daher die Werte von $\vec{P}$ für gegebenes $\vec{\alpha}'$ und damit $\vec{\mu}'$ am wahrscheinlichsten, für die die quadratische Form $y := (\vec{P} - \vec{\mu}')^T \Sigma^{-1} (\vec{P} - \vec{\mu}')$ minimal wird.

Relevant für die Schätzung ist der umgekehrte Fall: Anhand des gemessenen $\vec{P}$ soll auf $\vec{\alpha}'$ zurückgeschlossen werden. Nach der Maximum-Likelihood Methode ist dasjenige $\vec{\alpha}'$ zu wählen, das am wahrscheinlichsten zur Beobachtung $\vec{P}$ geführt hat. Der Maximum-Likelihood Schätzwert $\vec{\alpha}'$ ist daher durch

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}' = \arg \max_{\vec{\alpha}'} f(\vec{P}|\vec{\alpha}') &= \arg \max_{\vec{\alpha}'} \frac{1}{(2\pi)^n \det \Sigma} e^{-\frac{1}{2}(\vec{P} - \vec{\mu}')^T \Sigma^{-1} (\vec{P} - \vec{\mu}')} \\ &= \arg \min_{\vec{\alpha}'} (\vec{P} - \vec{\mu}')^T \Sigma^{-1} (\vec{P} - \vec{\mu}') \end{aligned} \quad (5.28)$$

gegeben.

5.2.3 Lösung der Schätzerleichung

Es steht die Lösung von (5.28) aus. Die Kovarianzmatrix Σ ist symmetrisch, positiv definit und reell. Damit ist auch die inverse Kovarianzmatrix Σ^{-1} , sofern sie existiert, symmetrisch und reell. Wird Σ^{-1} mit A und $\vec{P} - \vec{\mu}'$ mit $\vec{x}$ identifiziert, so läßt sich die quadratische

²s. auch Anhang A.2.2

Form wie folgt schreiben:

$$g(\vec{x}) := y = \vec{x}^T A \vec{x}. \quad (5.29)$$

Da Σ positiv definit ist, ist auch A positiv definit, und alle Eigenwerte von A sind positiv³. (5.29) beschreibt daher ein Hyperellipsoid. Ziel ist es, (5.29) durch Wahl von $\vec{\alpha}'$ zu minimieren. Es gilt

$$\vec{f}(\vec{\alpha}') := \vec{x} = \vec{P} - [B\vec{\alpha}' + r(\vec{1}_n - B\vec{1}_{m+1})]. \quad (5.30)$$

Daher ist

$$y = g(\vec{f}(\vec{\alpha}')) \quad (5.31)$$

zu minimieren. Notwendiges Kriterium für $\min_{\vec{\alpha}'} y$ ist⁴

$$\vec{0} \stackrel{!}{=} \vec{\nabla}_{\vec{\alpha}'} \cdot g(\vec{f}(\vec{\alpha}')) \quad (5.32)$$

$$= [\vec{\nabla}_{\vec{\alpha}'} \cdot \vec{f}^T(\vec{\alpha}')] \cdot [\vec{\nabla}_{\vec{f}} \cdot g(\vec{f}(\vec{\alpha}'))] \quad (5.33)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{d}{d\alpha'_1} f_1 & \frac{d}{d\alpha'_1} f_2 & \cdots & \frac{d}{d\alpha'_1} f_n \\ \frac{d}{d\alpha'_2} f_1 & \frac{d}{d\alpha'_2} f_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{d}{d\alpha'_{m+1}} f_1 & \cdots & \frac{d}{d\alpha'_{m+1}} f_{m+1} & \cdots & \frac{d}{d\alpha'_{m+1}} f_n \end{pmatrix} \cdot 2A\vec{f}(\vec{\alpha}') \quad (5.34)$$

$$= -2B^T A \vec{f}(\vec{\alpha}') \quad (5.35)$$

$$= B^T A \left(\vec{P} - [B\vec{\alpha}' + r(\vec{1}_n - B\vec{1}_{m+1})] \right)$$

$$\underbrace{B^T A B}_{A'} \vec{\alpha}' = \underbrace{B^T A \vec{P} + r B^T A (B\vec{1}_{m+1} - \vec{1}_n)}_{\vec{P}'} \quad (5.36)$$

$$A' \vec{\alpha}' = \vec{P}' \quad (5.37)$$

$$\vec{\alpha}' = (A')^{-1} \vec{P}' \quad (5.38)$$

Kriterium (5.32) ist gleichzeitig auch hinreichend, da alle Eigenwerte von A positiv sind, so daß die Funktion $g(\vec{f})$ konvex bezüglich $\vec{f}$ ist. Da $\vec{f}(\vec{\alpha}')$ eine lineare Abbildung nebst Koordinatenverschiebung darstellt, ist g auch bezüglich $\vec{\alpha}'$ konvex.

Es ist zu beachten, daß aus (5.35) nicht $\vec{f}(\vec{\alpha}') = \vec{0}$ folgt, da das Matrizenprodukt nicht nullteilerfrei ist.

(5.38) stellt die Maximum-Likelihood Estimation der erwarteten Fond-Renditen dar. Die Maximum-Likelihood Estimation der Wertpapier-Renditen erfolgt dann gemäß (5.24) zu:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} &= B(\vec{\alpha}' - r\vec{1}_{m+1}) + r\vec{1}_n \\ &= B((A')^{-1} \vec{P}' - r\vec{1}_{m+1}) + r\vec{1}_n \\ &= B \left[(B^T A B)^{-1} [B^T A \vec{P} + r B^T A (B\vec{1}_{m+1} - \vec{1}_n)] - r\vec{1}_{m+1} \right] + r\vec{1}_n \end{aligned} \quad (5.39)$$

³s. auch Anhang A.4.5

⁴s. Anhang A.4.3

Alle Größen in (5.39) sind bekannt. $\vec{P}$ wird durch Beobachtung gewonnen.

5.2.4 Geometrische Interpretation

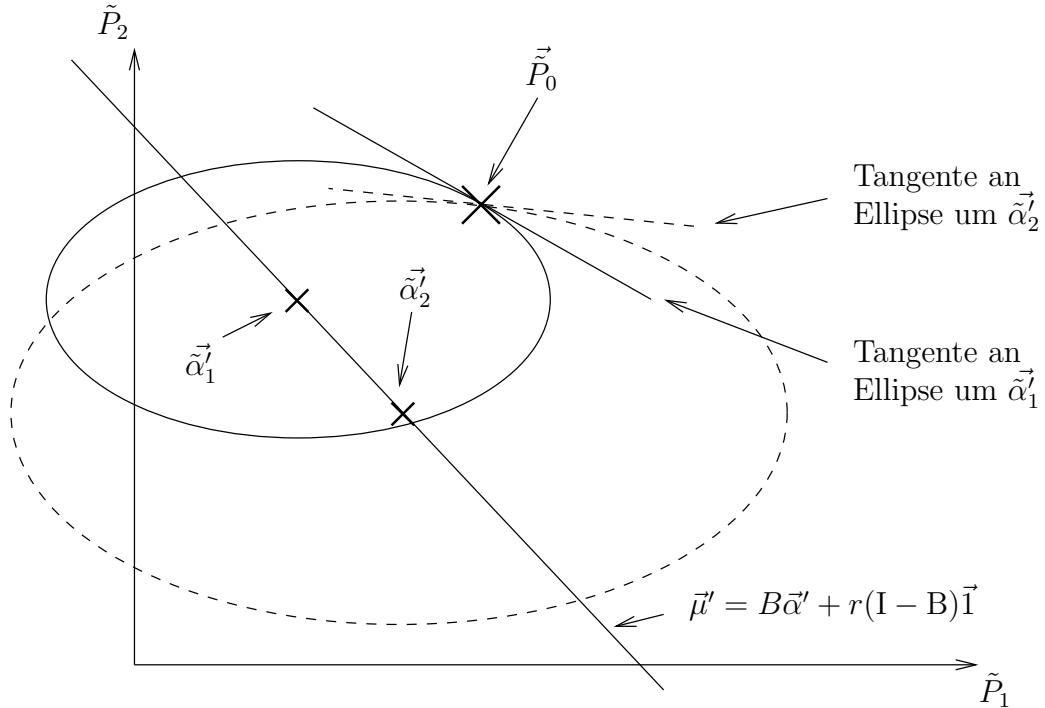


Abbildung 5.2: Grafische Interpretation der Maximum-Likelihood Estimation

Abbildung 5.2 veranschaulicht das Vorgehen der Maximum-Likelihood Estimation. Um eine zweidimensionale Zeichnung der geometrischen Objekte zu ermöglichen, wurde $n = 2$ und $m = 0$ angenommen. Das prinzipielle Verfahren ist in höheren Dimensionen jedoch analog. Die Abbildung zeigt den n -dimensionalen Beobachtungsraum von $\vec{P}$. Ohne Rauschen würden alle Beobachtungen auf der eingezeichneten Geraden $\vec{\mu}'$ liegen. Der Punkt $\vec{P}_0$ möge die gemachte Beobachtung darstellen. Aufgrund des vorhandenen Rauschens liegt die Beobachtung nicht auf der Geraden. Nach der Maximum-Likelihood Methode werden nun die Wahrscheinlichkeiten für die gemachte Beobachtung betrachtet, wenn ein bestimmtes Signal $\vec{\alpha}'$ zugrundeliegt. Wird angenommen, daß $\vec{\alpha}'_2$ ausgesandt wurde, so liegen die Punkte gleicher Wahrscheinlichkeitsdichte auf der gestrichelten Ellipse, deren Form und Lage durch $\vec{x}^T A \vec{x} = c = \text{const.}$ gegeben ist. Je größer diese Konstante c ist, desto kleiner ist die Wahrscheinlichkeit, daß $\vec{P}_0$ durch $\vec{\alpha}'_2$ hervorgerufen wurde. Wird nun angenommen, daß $\vec{\alpha}'_1$ ausgesandt wurde, so sind die Hauptachsen der Ellipse um $\vec{\alpha}'_1$ kleiner. Damit ist auch c kleiner, und die Wahrscheinlichkeit, daß $\vec{P}_0$ von $\vec{\alpha}'_2$ stammt, ist größer. Geometrisch ist nun leicht einzusehen, daß die Ellipse mit der minimalen Größe der Hauptachsen gefunden ist, wenn die Tangente an die Ellipse im Punkt $\vec{P}_0$ parallel zur

Geraden $\vec{\mu}'$ ist. In Abbildung 5.2 bedeutet dies, daß der Kursvektor, der am wahrscheinlichsten zu der Beobachtung $\vec{P}_0$ geführt hat, ein wenig oberhalb von $\vec{\alpha}'_1$ auf der Geraden $\vec{\mu}'$ liegt.

Im allgemeinen Fall werden die Hauptachsen der Ellipsen in Abhängigkeit von den Korrelationen der stochastischen Prozesse untereinander gegen das Koordinatensystem gedreht sein. Abbildung 5.2 zeigt den Spezialfall, daß die einzelnen Rauschprozesse $d z_i$ keinerlei Korrelation zueinander aufweisen. In diesem Fall besitzt die Kovarianzmatrix Σ ebenso wie Σ^{-1} Diagonalform, und die Eigenwerte sind direkt ablesbar.

Interpretation:

Die Größe der Hauptachsen der Ellipsen ist direkt proportional zur Streuung des zugehörigen stochastischen Prozesses. Das Vorgehen des Schätzers läßt daher wie folgt interpretieren: Desto größer die Streuung in einer Komponente der Beobachtung ist, desto weniger wird die betreffende Beobachtung berücksichtigt. Geht im Grenzfall die Streuung einer Komponente gegen Unendlich, so sind die Tangenten an diese „Ellipse“ alle parallel zu der betreffenden Achse, so daß diese Komponente gar keine Berücksichtigung mehr findet. Dieses Verhalten ist typisch für Schätzer, die die Varianz der Meßdaten berücksichtigen und findet sich in zahlreichen anderen Anwendungen der Estimationstheorie (z.B. Kalman-Filter).

5.3 Simulationsergebnisse

Auf der Grundlage, der abgeleiteten Beziehungen wurden numerische Simulationen auf dem Rechner durchgeführt⁵. Abbildung 5.3 zeigt sechs verschiedene Simulationsläufe. Dabei wurden folgende Parameter variiert:

1. Anzahl der Wertpapiere
2. Anzahl der Zustandsvariablen
3. Korrelation des Rauschprozesses $d \vec{z}$.

Tabelle 5.1 zeigt die eingestellten Parameter.

In allen Graphen von Abbildung 5.3 ist die Zeit in Simulationsschritten auf der Abszisse und die erwartete Wertpapierrendite auf der Ordinate aufgetragen. Jedes Diagramm enthält vier Kurven, die ein beispielhaft ausgewähltes Wertpapier repräsentieren. Kurve 1 beschreibt den Verlauf der vom Kursgenerator erzeugten erwarteten Rendite. Die Kurven 2–4 repräsentieren Schätzungen.

⁵Das zugehörige Programm ist in Anhang B.2 aufgeführt.

1. Kurve 2 beschreibt die erwartete Rendite, die durch Anwendung der Wertpapiermarktliniengleichung des klassischen CAPMs gewonnen wurde. Die bei dieser Berechnung benötigte erwartete Rendite des Marktportefeuilles wurde durch einen gleitenden Mittelwert der Länge 100 Simulationszeitheiten erzeugt.
2. Kurve 3 wurde durch Mittelung der Kurssteigung in einem Fenster der Länge 100 Simulationszeitheiten gewonnen. Die Kurven sind daher geglättet.
3. Kurve 4 beschreibt die Maximum-Likelihood Schätzung, wie im vorigen Abschnitt erläutert, auf der Basis der Daten von Kurve 3.

Simulations- Nummer	m	n	Korrelation	klassisches CAPM	Gleitender Mittelwert	Maximum- Likelihood
1	5	7	mittel	0.087	0.056	0.055
2	5	10	mittel	0.078	0.098	0.079
3	2	10	mittel	0.027	0.077	0.041
4	5	8	mittel	0.118	0.077	0.069
5	5	8	hoch	0.024	0.061	0.053
6	5	8	gering	0.737	0.262	0.259

Tabelle 5.1: Standardabweichungen der Schätzer unter verschiedenen Bedingungen

Es ist anzumerken, daß die hier durchgeführten Simulationen qualitativen Charakter haben. Die Simulation erfordert die Einstellung von zahlreichen Parametern, die alle Einfluß auf die Ergebnisse haben. In so fern sind die Zahlenwerte in Tabelle 5.1 und Abbildung 5.3 nur im Vergleich untereinander sinnvoll.

Diskussion:

Betrachtet werden zunächst die Simulationen Nr. 1–3. Diese Reihe zeichnet sich dadurch aus, daß das Verhältnis zwischen Wertpapieren und Zustandsvariablen immer größer wird. Ein Vergleich der Kurven 3 und 4 zeigt, daß die Güte der Maximum-Likelihood Schätzung relativ zum einfachen gleitenden Mittelwert mit steigendem n/m zunimmt. Dies liegt daran, daß die Zahl der möglichen Freiheitsgrade der zugrundeliegenden Fondrenditen abnimmt. Dadurch wird die Dimension des Unterraums, in dem sich die erwarteten Renditen der Wertpapiere befinden müssen, kleiner. Dadurch können Komponenten des Rauschens besser erkannt und unterdrückt werden.

Die Qualität der Schätzung auf der Basis des klassischen CAPM mit steigendem n/m ebenfalls besser. Dies liegt jedoch weniger an der Verbesserung des Schätzwertes als vielmehr an einer Annäherung des Niveaus des generierten Kurses auf das der sicheren Anlage.

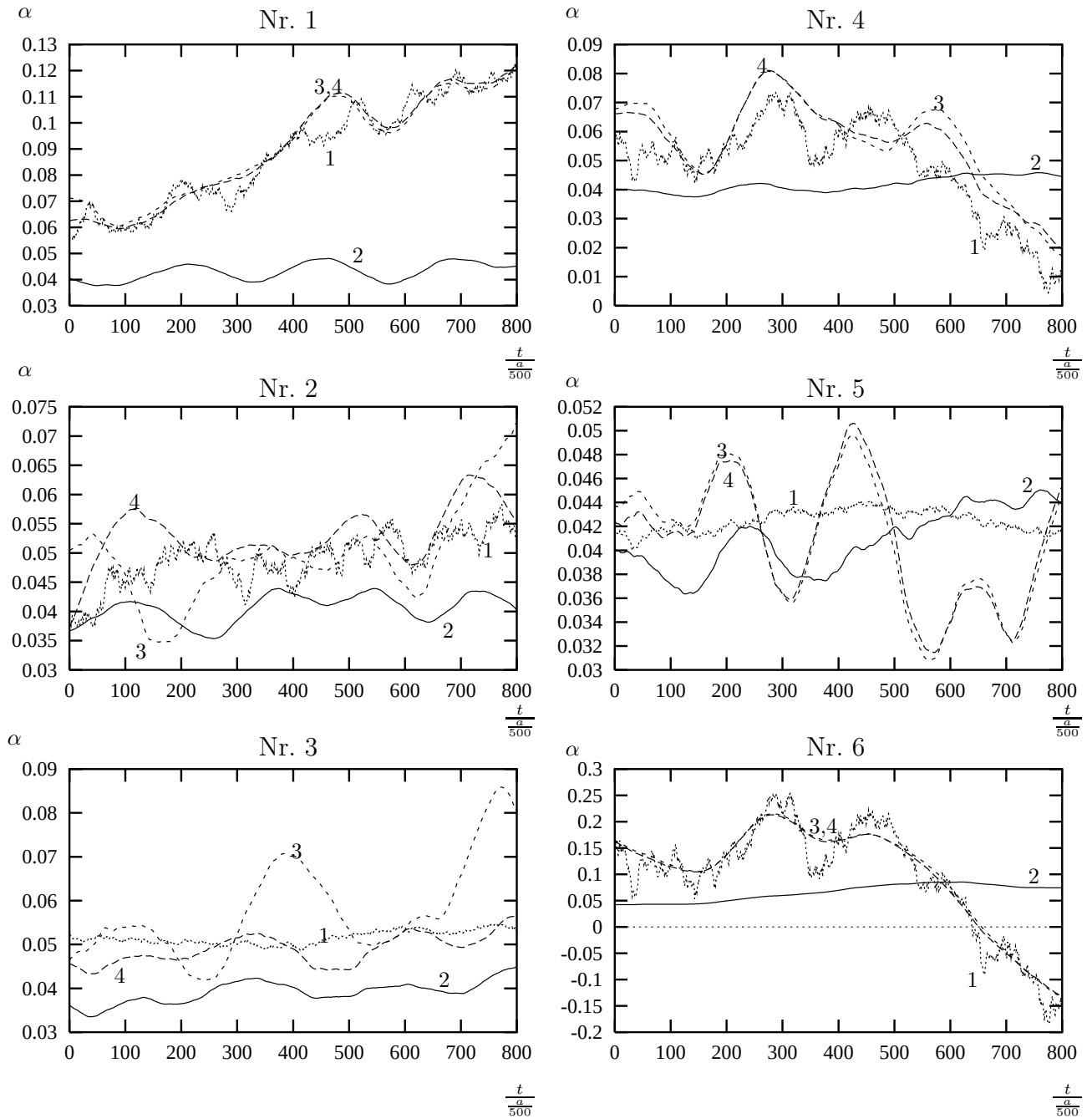


Abbildung 5.3: Simulierte Schätzungen bei unterschiedlichen Kostellationen

Die Simulationen Nr. 5, 4 und 6 weisen in dieser Reihenfolge eine Abnahme der Korrelation der Rauschprozesse, die den erwarteten Wertpapierrenditen überlagert sind, auf. Unter Berücksichtigung des größeren Maßstabes im Graphen Nr. 6 zeigt sich, daß die Güte der Maximum-Likelihood Schätzung in dieser Reihenfolge in etwa konstant bleibt. Im Gegensatz dazu bleibt Kurve 2 in Graph Nr. 6 starr. Graph Nr. 6 zeigt sehr anschaulich, wie der Schätzwert, der dem Modell des klassischen CAPM gehorcht, nicht in der Lage ist, dem tatsächlichen Kurs zu folgen. Dem Schätzwert fehlt der dazu nötige Freiheitsgrad.

Die Schätzung der erwarteten Wertpapierrenditen erweist sich als eine schwer zu lösende Aufgabe. Dies liegt an der fehlenden Konvergenz der Itô-Prozesse im Differentialquotienten. Ohne die eingesetzte Fensterung oder eine vergleichbare Filterung mit Tiefpaß-Eigenschaften ist dem Kurs kaum eine verwertbare Information über die erwarteten Renditen abzuringen. Die Fensterung bedingt natürlich andererseits eine Vergangenheitslastigkeit der Schätzungen. Es ist daher ein Kompromiß zwischen Genauigkeit und Aktualität der Schätzung zu finden.

A Mathematische Grundlagen

Die folgenden Ausführungen geben einen kurzen Überblick über verwendete mathematische Hilfsmittel. Sie sind bewußt knapp gehalten und dienen nur der Vorstellung oder Auffrischung der betreffenden Zusammenhänge. Eine detailliertere Darstellung findet sich in den angegebenen Literaturquellen.

A.1 Die Konvergenzsymbole $o(\cdot)$ und $O(\cdot)$

Es seien $\psi(h)$ und $\lambda(h)$ Funktionen von h . Dann läßt sich die asymptotische Eigenschaft¹ von $\psi(h)$ gegenüber $\lambda(h)$ für $h \rightarrow 0$ wie folgt schreiben:

$$\psi(h) = \begin{cases} O[\lambda(h)] & \text{falls } \left| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(h)}{\lambda(h)} \right| < a \in \mathbb{R}^+ \\ o[\lambda(h)] & \text{falls } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(h)}{\lambda(h)} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Gilt $\psi(h) = O(\lambda(h))$ und $\psi(h) \neq o(\lambda(h))$ dann gilt für $h \rightarrow 0$ $\psi(h) \sim \lambda(h)$.

Ein Beispiel:

Es sei $\psi(h) = ch^{\frac{1}{2}}e^h$. Dann gilt:

$$\left| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(h)}{\lambda(h)} \right| = \left| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ch^{\frac{1}{2}}e^h}{\lambda(h)} \right| = c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{\frac{1}{2}}}{\lambda(h)} = \begin{cases} \text{„}\infty\text{“} & \text{für } \lambda(h) = h^\gamma, \gamma > \frac{1}{2} \\ c & \text{für } \lambda(h) = h^\gamma, \gamma = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{für } \lambda(h) = h^\gamma, \gamma < \frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Es folgt:

$$\psi(h) = \begin{cases} O(h^\gamma) & \text{für } \gamma \leq \frac{1}{2} \\ o(h^\gamma) & \text{für } \gamma < \frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

A.2 Charakteristika von stochastischen Prozessen

A.2.1 Verteilungsdichten

$f(x)$ heißt Verteilungsdichtefunktion² und $F(x)$ Verteilungsfunktion³ der stetigen Zufallsvariablen X wenn gilt

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{P(X < x + \Delta) - P(X < x)}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta) - F(x)}{\Delta} = f(x) \quad (\text{A.4})$$

mit $P(X < x)$ der Wahrscheinlichkeit, daß die Zufallsvariable X kleiner als x ist.

Es gilt die Normierungsbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1. \quad (\text{A.5})$$

¹vgl. Merton, R. C.: „Continuous-Time Finance“, S. 63

²vgl. Bronstein, I. N.; Semendjajew, K. A.: „Taschenbuch der Mathematik“, S. 663

³vgl. Bronstein, I. N.; Semendjajew, K. A.: „Taschenbuch der Mathematik“, S. 661

	Normalverteilung	logarithmische Normalverteilung
Verteilungsdichte	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}e^{\lambda/2}\pi} e^{-\frac{\ln^2(x)}{\lambda}} & \text{für } x > 0 \end{cases}$
Erwartungswert	$E\{x\} = \mu$	$E\{x\} = e^{-\frac{3}{16}\lambda}$
Varianz	$var(x) = \sigma^2$	$var(x) = e^{-\frac{\lambda}{4}}$

Tabelle A.1: Eigenschaften der Normalverteilung und der logarithmischen Normalverteilung

Von besonderem Interesse sind in dieser Arbeit die Normalverteilung und die logarithmische Normalverteilung. Tabelle A.1 zeigt listet die wichtigsten Eigenschaften der beiden Funktionen.

Die Vorfaktoren sind so gewählt, daß die Normierungsbedingung (A.5) erfüllt ist. Die Normalverteilung ist durch die zwei Parameter μ und σ^2 vollständig beschrieben. Die logarithmische Normalverteilung benötigt nur den Parameter λ zu ihrer vollständigen Beschreibung.

A.2.2 Mehrdimensionale Verteilungsdichten

In dieser Arbeit ist nur die mehrdimensionale Normalverteilung von Bedeutung. Sie hat in n Dimensionen die folgende Verteilungsdichte⁴:

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n \det \Sigma} e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^T \Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})}. \quad (\text{A.6})$$

Es gilt ferner

$$E\{\vec{x}\} = \vec{\mu}, \quad (\text{A.7})$$

$$var(\vec{x}) = \Sigma. \quad (\text{A.8})$$

Man schreibt auch kurz: $\vec{x}$ ist $N(\vec{\mu}, \Sigma)$ -verteilt.

Erzeugung:

Gegeben sei ein Zufallsvektor $\vec{x}$, der standardnormalverteilt ist ($N(\vec{0}, I)$). Um einen Zufallsvektor $\vec{y}$ zu erhalten, der $N(\vec{\mu}, \Sigma)$ -verteilt ist, wird folgende die Transformation durch-

⁴Melsa, James L.; Cohn, David L.: „Decision and Estimation Theory“, S. 253

geführt⁵:

$$\vec{y} = \Lambda \vec{x} + \vec{\mu}. \quad (\text{A.9})$$

Λ ist die Cholesky-Zerlegung⁶ von Σ .

A.2.3 Autokorrelation / Gedächtnislosigkeit

Die Autokorrelationsfunktion $\phi_{xx}(t)$ eines zeitkontinuierlichen Prozesses $x(t)$ ist durch

$$\phi_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau) d\tau \quad (\text{A.10})$$

gegeben⁷. Konvergiert (A.10) nicht, so kann

$$\phi_{xx}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) d\tau \quad (\text{A.11})$$

betrachtet werden⁸.

Der Prozeß heißt gedächtnislos, wenn

$$\phi_{xx}(t) = c\delta(t) \quad (\text{A.12})$$

$c \in \mathbb{R}$ gilt. Dabei ist $\delta(t)$ die Diracfunktion, die implizit als neutrales Element bezüglich der Faltung definiert werden kann:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-\xi) d\xi. \quad (\text{A.13})$$

Eine mögliche Darstellungsform der Diracfunktion ist

$$\delta(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \quad (\text{A.14})$$

Durch Betrachtung der Fourier-Transformation von (A.12)

$$c \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-2\pi i t f} df = c, \quad (\text{A.15})$$

ergibt sich ein konstantes Spektrum. Gedächtnislose Prozesse werden daher auch als „weiß“ bezeichnet⁹.

⁵vgl. Bunks, Carey; Delebecque, François; Le Vey, Georges; Steer, Serge: „ΨLab: The Signal Processing Toolbox“, S. 4

⁶s. Anhang A.4.4

⁷vgl. Lueke, Hans Dieter: „Signalübertragung“, S. 79

⁸vgl. Lueke, Hans Dieter: „Signalübertragung“, S. 87

⁹vgl. Lueke, Hans Dieter: „Signalübertragung“, S. 132

A.2.4 Stationarität

Ein Prozeß heißt stationär, wenn für die Musterprozesse s_k

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M F[s_k(t_1), \dots, s_k(t_n)] = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M F[s_k(t_1 + \Delta t), \dots, s_k(t_n + \Delta t)] \quad (\text{A.16})$$

für $\Delta t \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig gilt¹⁰.

Anschaulich gesprochen bedeutet dies, daß alle Parameter eines stochastischen Prozesses invariant gegenüber zeitlichen Verschiebungen sind.

A.2.5 Wiener-Prozeß

Ein Prozeß X heißt Wiener-Prozeß¹¹, wenn $X(0) = 0$ gilt und $X(t) - X(s)$ für $t > s$ unabhängig von $X(s)$ ist und die Varianz der Differenz nur von $t - s$ abhängig ist. Dies bedeutet, daß die einzelnen Inkremente des Prozesses unabhängig sind, der Prozeß der Inkremente daher gedächtnislos ist. Es gilt ferner

$$E\{X^2(t)\} = \sigma^2 t \quad (\text{A.17})$$

und

$$E\{X(s)X(t)\} = \sigma^2 \cdot \min(s, t). \quad (\text{A.18})$$

A.3 Itô-Prozesse / Itô's Lemma

A.3.1 Motivation des Formalismus für stochastische Differentialgleichungen

$X(t)$ sei der Preis eine Anlage zum Zeitpunkt t dann gilt für $T = nh$

$$X(T) - X(0) = \sum_{k=1}^n [X(kh) - X((k-1)h)]. \quad (\text{A.19})$$

n ist die Anzahl der Handelsintervalle und h die Dauer derselben. (A.19) ist eine Teleskopsumme. Nun sei die unerwartete Preisänderung vom Zeitpunkt $(k-1)h$ zum Zeitpunkt kh betrachtet. Sie berechnet sich wie folgt:

$$\epsilon(kh) = X(kh) - X((k-1)h) - E_{(k-1)h} \{X(kh) - X((k-1)h)\}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (\text{A.20})$$

Wegen $E\{E\{x\}\} = E\{x\}$ gilt $E_{(k-1)h}\{\epsilon(kh)\} = 0$.

Mit den Kurzschreibweisen $\text{var}(S_n) := E_0\{[\sum_{k=1}^n \epsilon(kh)]^2\}$ und $V(kh) := E_0\{\epsilon^2(kh)\}$ für $k = 1, \dots, n$ sowie $V := \max_k V(kh)$ werden nun folgende Annahmen über die statistischen Eigenschaften von ϵ gemacht:

¹⁰vgl. Lueke, Hans Dieter: „Signalübertragung“, S. 123

¹¹vgl. Feller, William: „An Introduction to Probability Theory and Its Applications“, S. 99

1. Für jedes endliche Zeitintervall $[0, T]$ existiert eine Zahl $A_1 \in \mathbb{R}^+$, die unabhängig von der Zahl der Handelsintervalle n ist, so daß $\text{var}(S_n) \geq A_1$.
2. Für jedes endliche Zeitintervall $[0, T]$ existiert eine von n unabhängige endliche Zahl $A_2 \in \mathbb{R}^+$, so daß $\text{var}(S_n) \leq A_2$.
3. Es existiert eine von n unabhängige Zahl $A_3 \in \mathbb{R}$ mit $1 \geq A_3 > 0$, so daß für $k = 1, \dots, n$ $V(k)/V \geq A_3$ gilt.

Aus diesen drei Annahmen folgt (ohne Beweis), daß für $h \rightarrow 0$ $V(kh) \sim h$ ist. Wird daher

$$X(kh) - X((k-1)h) = \alpha_k h + \epsilon(kh), \quad k = 1, \dots, n \quad (\text{A.21})$$

betrachtet, so folgt, daß der Grenzwert für $h \rightarrow 0$ bezogen auf h wegen $\epsilon \sim h^{1/2}$ nicht existiert:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(kh) - X((k-1)h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha_k h + \epsilon(kh)}{h} = \alpha_k + \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{1/2}}{h}}_{\text{divergiert}} \quad (\text{A.22})$$

(A.22) gibt bereits eine Anleitung, wie zur Ableitung eines nützlichen Formalismus weiter vorzugehen ist. Man definiere eine Zufallsvariable $u(kh)$ wie folgt:

$$u(kh) := \frac{\epsilon(kh)}{\sqrt{\sigma_k^2 h}}. \quad (\text{A.23})$$

$u(kh)$ hat per definitionem folgende Eigenschaften: $u(kh) = O(1)$, $E_{(k-1)h}\{u(kh)\} = 0$, $E_{(k-1)h}\{u^2(kh)\} = 1$ und $E_{(k-1)h}\{|u(kh)|^N\} = O(1)$, für $N > 2$. Dies bedeutet, daß der Erwartungswert Null, die Varianz Eins und alle höheren Momente für $h \rightarrow 0$ nicht divergieren.

Mit Hilfe von $u(kh)$ läßt sich (A.21) wie folgt schreiben:

$$X(kh) - X((k-1)h) = \alpha_k h + \sigma_k u(kh) h^{1/2}, \quad k = 1, \dots, n \quad (\text{A.24})$$

(A.24) ist für das Verständnis des Formalismus der stochastischen Differentialgleichungen existenziell. Bemerkenswert ist der Exponent $\frac{1}{2}$ beim zweiten Summanden von (A.24). Dieser Exponent hat seinen Ursprung in den speziellen Annahmen, die oben über $\epsilon(hk)$ getroffen wurden. (A.24) stellt zudem die Ausgangsgleichung für die Simulation der Prozesse auf dem Rechner dar.

Durch Betrachtung von (A.24) für $h \rightarrow 0$ wird zur differentiellen Schreibweise übergegangen:

$$dX(t) = \alpha(t) dt + \sigma(t)u(t) (dt)^{1/2} \quad (\text{A.25})$$

Die Summe in (A.19) wird zu einem Integral und $X(T) - X(0)$ ist durch

$$X(T) - X(0) = \int_0^T \alpha(t) dt + \int_0^T \sigma(t) u(t) (dt)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.26})$$

gegeben. Durch Einführen der Notation

$$dz = u(t) (dt)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.27})$$

wird (A.25) zu

$$dX(t) = \alpha(t) dt + \sigma(t) dz \quad (\text{A.28})$$

Sofern $\{u(t)\}$ in (A.27) normalverteilt gedächtnislos ist, ist dz in (A.27) Wiener-Prozeß oder Brown'schen Bewegung¹².

A.3.2 Itô-Prozesse

Itô-Prozesse¹³ werden durch die folgende stochastische Differentialgleichung beschrieben:

$$d\vec{P} = \vec{f}(\vec{P}, t) dt + G(\vec{P}, t) dz. \quad (\text{A.29})$$

G ist eine quadratische Diagonalmatrix. dz ist ein mehrdimensionaler Wiener-Prozeß. Die Betrachtung in Form von (A.29) wird erforderlich, da die Prozesse nicht im eigentlichen Sinn differenzierbar sind. Der Differentialquotient existiert nicht. Daher wird der Prozeß als Summe zweier Teile dargestellt. Der linke Summand auf der rechten Seite von (A.29) beschreibt ein gewöhnliches Differential. Der rechte Summand enthält dagegen denjenigen Teil, der bei Betrachtung infinitesimaler Abschnitte im Quotienten nicht konvergiert.

A.3.3 Itô's Lemma

Satz:

Sei $F(\vec{P}, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+ \mapsto \mathbb{R}$ eine C^2 Funktion und

$$P_i(t) = P_i(0) + \int_0^t f_i(\vec{P}, s) ds + \int_0^t g_i(\vec{P}, s) dz_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{A.30})$$

dann ist die zeitabhängige Zufallsvariable $Y := F$ ein stochastisches Integral und ihr stochastisches Differential bestimmt sich zu

$$dY = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial P_i} dP_i + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial P_i \partial P_j} dP_i dP_j. \quad (\text{A.31})$$

¹²vgl. Merton, R. C.: „Continuous-Time Finance“, S. 77

¹³vgl. Merton, R. C.: „Continuous-Time Finance“, S. 122 ff.

Dabei gilt für die Produkte $dP_i dP_j$

$$dz_i dz_j = \rho_{ij} dt, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (\text{A.32})$$

$$dz_i dt = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{A.33})$$

mit ρ_{ij} dem augenblicklichen Korrelationskoeffizient der Wiener-Prozesse dz_i und dz_j . Insbesondere die Rechenregeln (A.32) und (A.33) sind ausgesprochen nützlich. Gerade diese Regeln sind meistens gemeint, wenn im Text von „nach Itô's Lemma gilt“ die Rede ist.

A.4 Lineare Algebra

A.4.1 Eigenwerte / Eigenvektoren

Betrachtet wird eine lineare Abbildung, deren Bild ein Vielfaches des Urbildes ist¹⁴:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad (\text{A.34})$$

λ heißt Eigenwert der $n \times n$ -Matrix A und $\vec{x}_\lambda$ heißt Eigenvektor bezüglich des Eigenwerts λ . Es existieren höchstens n verschiedene Eigenwerte. Tritt ein Eigenwert mehrfach auf, so sind ihm Hauptvektoren entsprechend der Vielfachheit zuzuordnen. Auf diese Zusammenhänge soll hier jedoch nicht weiter eingegangen werden.

Die Abbildung $B^{-1}AB$ transformiert A durch Drehung des Koordinatensystems auf Diagonalgestalt. B ist spaltenweise mit den Eigenvektoren von A gefüllt:

$$B = (\vec{x}_{\lambda_1}, \dots, \vec{x}_{\lambda_n}). \quad (\text{A.35})$$

Sofern A symmetrisch ist, sind alle Eigenwerte reell, und es läßt sich eine orthogonale Matrix C finden, so daß $C^T A C$ von Diagonalgestalt ist. Dies ist bei der hier betrachteten Anwendung von großer Bedeutung, da die inverse Kovarianzmatrix Σ^{-1} symmetrisch ist. Die Matrix C ist in diesem Fall die orthonormalisierte Matrix B .

A.4.2 Hauptachsentransformation quadratischer Formen

Betrachtet wird ein Ausdruck der Gestalt¹⁵

$$f(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}. \quad (\text{A.36})$$

A ist eine symmetrische reelle $n \times n$ -Matrix. Gesucht ist eine Transformation $\vec{x} = C\vec{y}$, so daß

$$\vec{y}^T (C^T A C) \vec{y} = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \quad (\text{A.37})$$

¹⁴vgl. Bronstein, I. N.; Semendjajew, K. A.: „Taschenbuch der Mathematik“, S. 164-165

¹⁵vgl. Bronstein, I. N.; Semendjajew, K. A.: „Taschenbuch der Mathematik“, S. 166-167

ist. Diese Matrix C ist die in Abschnitt A.4.1 beschriebene Matrix C . (A.36) beschreibt für $f(\vec{x}) = \text{const.}$ die geometrischen Orte, die durch Schnitt eines n -dimensionalen Hyperkegels mit einer $n - 1$ -dimensionalen Hyperfläche entstehen.

A.4.3 Gradient einer quadratischen Form

Betrachtet wird

$$y = \vec{x}^T A \vec{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (\text{A.38})$$

mit $A = A^T$. Dann ist

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\vec{x}^T A \vec{x}) = 2 \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad (\text{A.39})$$

so daß

$$\vec{\nabla} \cdot y = 2A\vec{x} \quad (\text{A.40})$$

ist.

A.4.4 Cholesky-Zerlegung

Es sei A eine reelle, symmetrische, positiv definite $n \times n$ -Matrix. Dann existiert eine eindeutig bestimmte obere Dreiecksmatrix R mit positiven Diagonalelementen, so daß

$$A = R^T R \quad (\text{A.41})$$

ist¹⁶.

A.4.5 Wichtige Rechenregeln für und Eigenschaften von Matrizen

1. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
2. $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
3. $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$
4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
5. $(AB)^T = B^T A^T$
6. Sei A eine reelle symmetrische Matrix. Dann gilt: A ist positiv definit genau dann, wenn alle Eigenwerte von A größer Null sind.
7. Seien λ_i die Eigenwerte der Matrix A . Dann besitzt die Matrix A^{-1} die Eigenwerte λ_i^{-1} .
8. Sei A eine positiv definite Matrix. Dann ist auch A^{-1} positiv definit.

¹⁶Niemeyer, Horst; Wermuth, Edgar: „Lineare Algebra“, S. 143

A.5 Vektoranalysis

Es sei $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ ein differenzierbares skalares Feld. Dann heißt $\vec{\nabla} \cdot f(\vec{x}) = \text{grad } f(\vec{x})$ Gradient des skalaren Feldes mit

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (\text{A.42})$$

dem Nabla-Operator.

Kettenregel:

Sei $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ ein differenzierbares skalares Feld und $f : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ ein differenzierbares Vektorfeld. Betrachtet werde die Funktion $g(\vec{f}(\vec{x}))$. Der Gradient von g bezüglich $\vec{x}$ berechnet sich dann wie folgt:

$$\vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot g(\vec{f}(\vec{x})) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot g(\vec{f}(\vec{x})) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial f_j} \frac{df_j}{dx_1} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial f_j} \frac{df_j}{dx_n} \end{pmatrix} = [\vec{\nabla}_{\vec{x}} \vec{f}^T(\vec{x})] \cdot [\vec{\nabla}_{\vec{f}} \vec{g}(\vec{f})] \quad (\text{A.43})$$

B Erstellte Software

Die im Rahmen dieser Arbeit erstellte Software wurde auf einem Linux-Rechner geschrieben. Linux ist ein freier Unix-Clone und auf PCs lauffähig. In den Programmen wurden soweit möglich „sprechende“ Variablennamen verwendet, die durch ihre Bezeichnungsmethodik ohne Probleme den entsprechenden Variablen der mathematischen Analyse zuordnenbar sein sollten.

B.1 Entwicklung der optimalen Konsum- und Investitionsentscheidungen über die Zeit

Das nachfolgende Programm ist in ANSI-C geschrieben und mit gcc 2.6.3 übersetzt worden.

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

#define SQR(x) ((x)*(x))
#define ITERS 20

double Normal(double sigma)
{
    int i;
    static int n = 0;
    double sum = 0;

    for ( i=0 ; i<ITERS ; i++ )
        sum += rand() / (1.0*RAND_MAX) - 0.5;
    sum *= sigma*sqrt(12.0/ITERS);
    n++;
    if ( n & 0x100 )
        return sum;
    else
        return -sum;
}

#define STEPS 400
#define SCHRITTE 10000

int n;
double T;
double rho;
double gamma, beta, eta;
double r, alpha, sigma;
double delta, nu;
double dt;
double P, R, W;

double CalcCast(double W, double t)
{
    return (rho-gamma*nu)*(W+delta*eta/(beta*r)*(1-exp(r*(t-T))))/
        (delta*(1-exp((rho-gamma*nu)*(t-T)/delta))) - delta*eta/beta;
}

double Calcwast(double W, double t)
{
    return (alpha-r)/(delta*SQR(sigma))+
        eta*(alpha-r)/(beta*r*SQR(sigma))*(1-exp(r*(t-T)))/W;
}

main()
{
    int i, j;
    double f = 1;
```

```

double h;
int nh[STEPS+1];
double min = -4;
double max = 4;

double t = 0;

double Cast, wast;
double Csum;
double nP, nR;

    srand(123456789);

    n = 50; /* 50 Jahre Laufzeit */
    T = 1.0;
    dt = T/SCHRITTE;

    rho = 0.5;

/*  gamma = 0.2;
    beta = 0.3;
    eta = 0.5;
*/
    gamma = 0.2;
    beta = 1;
    eta = 3;

    r = n/T*log(1.0+2.5/100.0);
    alpha = n/T*log(1.0+4.0/100.0);
    sigma = 1.8;

    delta = 1-gamma;
    nu = r + SQR(alpha-r)/(2*delta*SQR(sigma));

    P = 1; /* Bewertung der unsicheren Anlage */
    R = 1; /* Bewertung der sicheren Anlage */
    W = 1; /* Startvermögen */

    t = 0;

    Cast = CalcCast(W, t);
    wast = Calcwast(W, t);

    Csum = 0;

    nP = wast*W/P;
    nR = (1-wast)*W/R;

    for ( i=0 ; i<SCHRITTE ; i++ )
    {
        t = T*i/SCHRITTE;
        /* Berechne Kursentwicklung */
        P += P*alpha*dt + Normal(sigma)*sqrt(dt);
        /* Berechne sichere Anlage */
        R += R*r*dt;
        /* Berechne neues Vermögen */
        W = nR*R + nP*P;
        /* Ziehe Konsum ab */
        W -= Cast*dt;
        /* Addiere zum Gesamtkonsum */
        Csum += Cast*dt;
        /* Werte Entscheidungsregeln aus */
        Cast = CalcCast(W, t);
        wast = Calcwast(W, t);
        /* Berechne neue Anzahl Wertpapiere */
        nP = wast*W/P;
        nR = (1-wast)*W/R;
        printf("i=%d, P=%f, R=%f, W=%f, Cast=%f, wast=%f\n",
            i, P, R, W, Cast, wast);
    }
    fprintf(stderr, "Csum = %f\n", Csum);
}

```

B.2 Kurssimulation gemäß den Annahmen des zeitkontinuierlichen CAPM

Das nachfolgende Programm wurde in Octave¹ geschrieben. Octave ist ein MathLab-Clone und unterliegt der GNU-Lizenz. Von einer Implementation in C oder C++ wurde aufgrund des exzessiven Gebrauchs von Matrix-Operationen abgesehen, da Octave alle nötigen Operationen in numerisch stabiler Form zur Verfügung stellt. Auf diese Weise bleibt der hier abgedruckte Source-Code erfreulich kurz.

```
function Calculate()

rand("uniform");           # Setze Gleichverteilung im Intervall [0,1] für
                           # Zufallszahlengenerator zur Erzeugung
                           # der Kovarianzmatrizen

rand("seed", 133);         # Initialisiere Zufallszahlengenerator

m = 5;                     # Anzahl Zustandsvariablen bzw. Fonds-1
n = 8;                     # Anzahl Wertpapiere

Jahre = 10;               # Simulationszeitraum
StepsProJahr = 1000;      # Anzahl Simulationsschritte pro Jahr
dt = 1.0/StepsProJahr;    # Simulationszeitintervall
runsicher = 0.08;         # Richtwert für erwartete Rendite
r = 0.04;                 # Zinssatz für sichere Anlage
#-----

g = rand(m,1)+0.5;        # Erzeuge g
alpha = log(1.0+runsicher)*ones(n,1);
alphaStern = log(1.0+runsicher)*ones(m+1,1);
aStern = zeros(m+1,1);
bStern = rand(m+1,1)/10;
wStern = rand(m+1,1);
P = 1*ones(n,1) - (rand(n,1)-0.5)/10; # Initialisierung der Wertpapierpreise
#-----

# Erzeuge Kovarianzmatrix für Fond-Prozeß (alphaStern)
a=0.2;                    # a bestimmt den mittleren
                           # Korrelationskoeffizienten
qSternSigma = rand(m+1)*a*a; # Erzeuge Kovarianzteil
                           # Setze Kovarianz und Varianz zusammen
                           # und garantiere Mindestvarianz
qSternSigma = tril(qSternSigma,-1)+triu(qSternSigma,1) + (
    triu(tril(rand(m+1)))) + 0.5*eye(m+1));
qSternSigma = qSternSigma'*qSternSigma; # stelle positive Definitheit sicher
qSternSigma = qSternSigma/5;
qSternSigmaChol = chol(qSternSigma);    # Berechne Cholesky-Zerlegung
                                         # zur Erzeugung
                                         # von Zufallsvektoren entsprechend der
                                         # geforderten Kovarianzmatrix
#-----

# Erzeuge Gesamtkovarianzmatrix
a=0.04;                    # a bestimmt den mittleren
                           # Korrelationskoeffizienten
SigmaGes = rand(m+n)*a*a; # Erzeuge Kovarianzteil
                           # Setze Kovarianz und Varianz zusammen
                           # und garantiere Mindestvarianz
SigmaGes = tril(SigmaGes,-1)+triu(SigmaGes,1) + (
    triu(tril(rand(m+n)))) + 0.5*eye(m+n));
SigmaGes = SigmaGes'*SigmaGes; # stelle positive Definitheit sicher
SigmaGes = SigmaGes/80000;
SigmaGesChol = chol(SigmaGes); # Berechne Cholesky-Zerlegung
```

¹Für eine Sprachbeschreibung s. Eaton, John W.: „Octave — A high-level interactive language for numerical computations“

```

# zur Erzeugung
# von Zufallsvektoren entsprechend der
# geforderten Kovarianzmatrix

#-----
Sigma = SigmaGes(1:n,1:n);      # Trenne Kovarianzmatrix der Wertpapiere ab
invSigma = inv(Sigma);          # Berechne die Inverse

#-----

for i=n+1:n+m                  # Berechne Korrelationsmatrix zwischen
    for j=1:n                  # Wertpapieren und Zustandsvariablen
        Eta(i-n,j) = SigmaGes(i,j)/sqrt(SigmaGes(i,i)*SigmaGes(j,j));
    endfor
endfor

#-----
# Berechne Delta
Delta = ((ones(m,1)*sqrt(diag(Sigma)))' .* Eta) * invSigma;

#-----
# Berechne X
X = (invSigma*(alpha-r*ones(n,1)));
X = [((g*ones(1,n)).*Delta)', X]';

#-----
#SigmaStern = X(1:m,1:n)*Sigma*(X(1:m,1:n))';      # Berechne SigmaStern
SigmaStern = X*Sigma*X';                            # Berechne SigmaStern

#-----
# Baue SigmaStrich aus SigmaStern
# und sigmaMStern zusammen
sigmaMStern = SigmaStern*wstern;
sigmaM2 = sigmaMStern'*wstern;
SigmaStrich = [SigmaStern(1:m,1:m),sigmaMStern(1:m,1)];
sigmaMStern = [sigmaMStern(1:m,1)',sigmaM2];
SigmaStrich = [SigmaStrich',sigmaMStern'];

invSigmaStrich = inv(SigmaStrich);

#-----
# Berechne B
B = (([invSigmaStrich(1:m+1,1:m), zeros(m+1,1)] +
      invSigmaStrich(1:m+1,m+1)*wstern')*X*Sigma)';

#-----
# Berechne die für die Maximum-Likelihood
# Schätzung nötigen Größen
A=invSigma;
AStrich = B'*A*B;
invAStrich = inv(AStrich);
BTA = B'*A;
rBTABI = r*B'*A*(B*ones(m+1,1)-ones(n,1));

#-----

Markt = (X'*wstern)./P;          # Bestimme Marktportefeuille

# Berechne normierte Varianz
# des Marktportefeuilles
sigmaM2Norm = sigmaM2/(sum(Markt.*P)*sum(Markt.*P));

#-----

rand("normal");                  # Setze Normalverteilung mit Varianz 1 und
                                # Erwartungswert 0 für Zufallszahlengenerator
                                # zur Erzeugung der Rauschprozesse

# Allokiere Speicher für die Simulationsgrößen
alphaSternFolge = zeros(m+1,StepsProJahr);
alphaFolge = zeros(n,StepsProJahr);
PFolge = zeros(n+1,StepsProJahr);
alphaTildeFolge = zeros(n,StepsProJahr);
alphaTildeCAPMFolge = zeros(n,StepsProJahr);
PTildeDifFolge = zeros(n+1,StepsProJahr);
PTildeDif = zeros(n+1,1);

```

```

TMittel = 100;          # Anzahl der Werte, über die gemittelt wird
TDif = 100;             # Abstand zwischen zwei "Kursproben"
Drift = (TMittel+TDif)/2; # Dadurch bedingte Zeitverschiebung

#-----
##### Simulationsschleife #####
for step = 1:StepsProJahr
    # Berechne normalverteilten Zufallsvektor
    dxi = SigmaGesChol'*rand(m+n,1)*sqrt(dt);
    dz = dxi(1:n,1);      # Spalte dz ab
    dq = dxi(n+1:n+m,1);  # Spalte dq ab

    # Berechne normalverteilten Zufallsvektor
    dqStern = qSternSigmaChol'*rand(m+1,1)*sqrt(dt);
    # Berechne neue erwartete Fondrenditen
    alphaStern = alphaStern + aStern*dt + bStern.*dqStern;
    # Hänge an Vorgeschichte an
    alphaSternFolge(1:m+1,step) = alphaStern;

    # Berechne neue erwartete
    # Wertpapierrenditen
    alpha = B*(alphaStern-r*ones(m+1,1))+r*ones(n,1);
    alphaFolge(1:n,step) = alpha;      # Hänge an Vorgeschichte an

    Palt = P;
    P = P + P.*alpha*dt + P.*dz;      # Berechne neuen Preisvektor
    PM = sum(Markt.*P);               # Berechne Preis des Marktportefeuilles
    PFolge(1:n+1,step) = [P',PM]';    # Hänge an Vorgeschichte an

#-----

    # Kursmittellung zweier Proben:
    # Entfernen eines Wertes
    if ( step>TMittel+TDif )
        Alt = PFolge(1:n+1,step-TMittel-TDif);
        Neu = PFolge(1:n+1,step-TMittel);
        PTildeDif = PTildeDif - (Neu-Alt)./(Alt*dt*TMittel*TDif);
    endif

    # Kursmittellung zweier Proben:
    # Aufnehmen eines Wertes
    if ( step>TDif )
        Alt = PFolge(1:n+1,step-TDif);
        Neu = PFolge(1:n+1,step);
        PTildeDif = PTildeDif + (Neu-Alt)./(Alt*dt*TMittel*TDif);
    endif

    PTildeDifFolge(1:n+1,step) = PTildeDif; # Hänge an Vorgeschichte an

#-----

    # Berechne Maximum-Likelihood Schätzwert
    # auf der Basis von PTildeDif
    PStrich = BTA*PTildeDif(1:n,1) + rBTABI;
    alphaTilde = B*(invASTrich*PStrich-r*ones(m+1,1))+r*ones(n,1);
    alphaTildeFolge(1:n,step) = alphaTilde; # Hänge an Vorgeschichte an

#-----

    # Bestimme erwartete Rendite des
    # Marktportefeuilles aus
    # beobachteten Werten
    alphaM = PTildeDif(n+1,1);

    # Berechne Beta-Faktoren des klassischen
    # CAPM
    sigmaiM = Sigma*(Markt.*P/PM);
    beta = sigmaiM/sigmaM2Norm;      # Normiere auf Marktportefeuillevarianz

    # Berechne auf Basis der
    # Wertpapiermarktklinie die
    # erwarteten Renditen
    alphaTildeCAPM = beta*(alphaM-r)+r*ones(n,1);
    alphaTildeCAPMFolge(1:n,step) = alphaTildeCAPM; # Hänge an Vorgeschichte an

```



```

endfor

#-----
#####

                                # Bestimme Differenzvektoren
DifalphaTildeFolge = (alphaTildeFolge(1:n,2*Drift:StepsProJahr)-
  alphaFolge(1:n,Drift:(StepsProJahr-Drift)))';
DifPTildeDifFolge = (PTildeDifFolge(1:n,2*Drift:StepsProJahr)-
  alphaFolge(1:n,Drift:(StepsProJahr-Drift)))';
DifalphaTildeCAPMFolge = (alphaTildeCAPMFolge(1:n,2*Drift:StepsProJahr)-
  alphaFolge(1:n,Drift:(StepsProJahr-Drift)))';

                                # Berechne die Standardabweichungen
StdMaxLike = std(DifalphaTildeFolge);
StdNormal = std(DifPTildeDifFolge);
StdCAPM = std(DifalphaTildeCAPMFolge);

                                # Summiere die Komponenten auf
StdSumMaxLike = sum(StdMaxLike);
StdSumNormal = sum(StdNormal);
StdSumCAPM = sum(StdCAPM);

StdSumMaxLike
StdSumNormal
StdSumCAPM

#-----

for i = 1:5
  set term x11
  set nokey
  gplot alphaTildeCAPMFolge(i,2*Drift:StepsProJahr)' w \\\
    1,alphaTildeFolge(i,2*Drift:StepsProJahr)' w \\\
    1,PTildeDifFolge(i,2*Drift:StepsProJahr)' w \\\
    1,alphaFolge(i,Drift:StepsProJahr-Drift)' w l
  input("Eine Taste drücken")
endfor

i = input("Nummer:")
set terminal postscript portrait "Times-Roman" 10
set output "sim6.gps"
set size 0.4, 0.3
set nokey
gplot alphaTildeCAPMFolge(i,2*Drift:StepsProJahr)' w \\\
  1,alphaTildeFolge(i,2*Drift:StepsProJahr)' w \\\
  1,PTildeDifFolge(i,2*Drift:StepsProJahr)' w \\\
  1,alphaFolge(i,Drift:StepsProJahr-Drift)' w l\\
endfunction

```

Literatur

- [1] Robert C. Merton: „Continuous-Time Finance“, Blackwell Publishers, 2. Auflage 1992
- [2] Bronstein, I. N.; Semendjajew, K. A.: „Taschenbuch der Mathematik“, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt (Main), 23. Aufl., 1987
- [3] Feller, William: „An Introduction to Probability Theory and Its Applications“, John Wiley & Sons, Volume II, 2. Aufl., 1971
- [4] Lueke, Hans Dieter: „Signalübertragung — Grundlagen der digitalen und analogen Nachrichtenübertragungssysteme“, Springer Verlag, 4. Auflage, 1990
- [5] Melsa, James L.; Cohn, David L.: „Decision and Estimation Theory“, McGraw-Hill, 1978
- [6] Niemeyer, Horst; Wermuth, Edgar: „Lineare Algebra“, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1987
- [7] Bunks, Carey; Delebecque, François; Le Vey, Georges; Steer, Serge: „ΨLab: The Signal Processing Toolbox“, GNU Public Documentation, ftp::sunsite.unc.edu/pub/Linux/apps/math/matrix/scilab-2.0*, 22. November 1994
- [8] Eaton, John W.: „Octave — A high-level interactive language for numerical computations“, GNU Public Documentation, ftp::sunsite.unc.edu/pub/Linux/apps/math/octave*, Edition 1.0 for Octave 1.0, Februar 1994

Versicherung

Ich versichere hiermit, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten und nicht veröffentlichten Schriften entnommen sind, sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit ist in gleicher oder ähnlicher Form noch nicht als Prüfungsarbeit eingereicht worden.

Aachen, den 06.09.1995